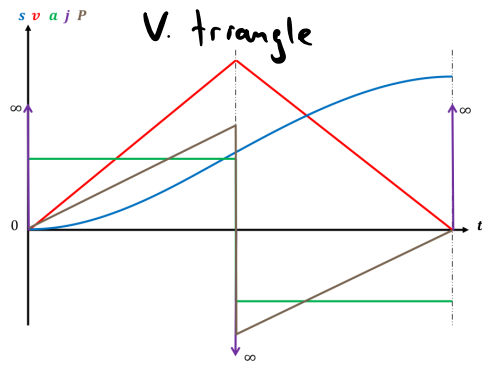


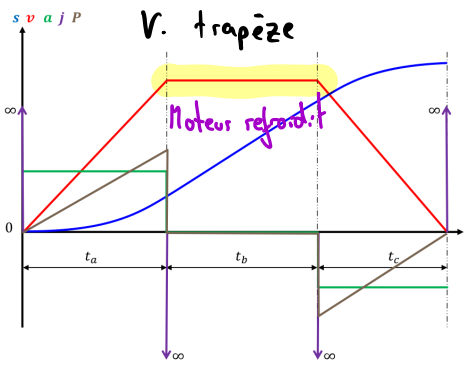
# Technique d'entraînement

## Courbes de mouvement

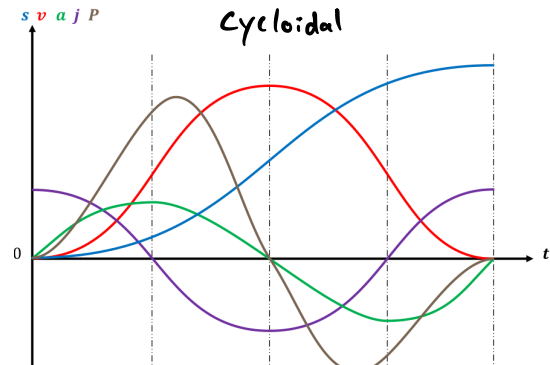
$\Delta s$  Distance à parcourir  
 $\Delta t_{tot}$  Temps pour  $\Delta s$   
 $V = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$  Vitesse  
 $a = \frac{dv}{dt} = \ddot{s}$   $a \sim M$   
 $j = \frac{da}{dt} = \ddot{a}$  Jerk  
 $P = F \cdot v$  Puissance  
 $\rightarrow \sim v \cdot a$



- Pour mouvement lent
- Plus grand  $\Delta s$  pour petit  $a$
  - Échauffement moteur
  - $j = \infty \Rightarrow$  mouvement précis défavorable

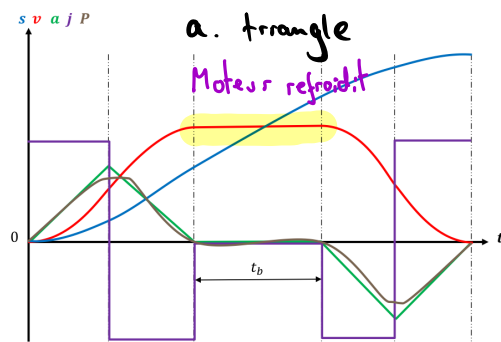


- Pour mouvement lent avec petite  $a$ .
- Limiter  $v_{max}$
  - Si  $t_a = t_b = t_c$ , on dit V. trapèze optimale

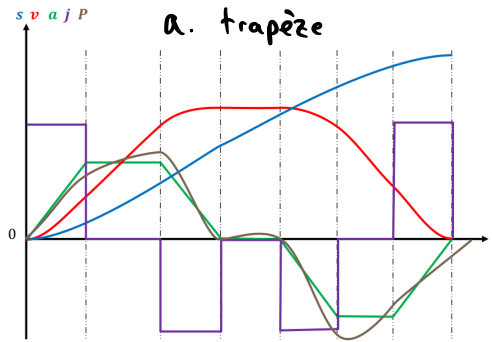


- Bon comportement dynamique

jerk est important pour le confort de l'utilisateur



- $j = \text{const}$
- Si  $a \uparrow$ , le couple peut devenir grand



$\Rightarrow$  le plus utilisé

- $j = \text{const}$
- $a = \text{limitée}$
  - électronique simple
  - Mouvement sans saccade
  - $v_{max}$  et  $a_{max}$  et  $t$  optimaux !

## Inertie

Linéaire

$F = m \cdot a$   
 $E = \frac{1}{2} m v^2$

Rotation

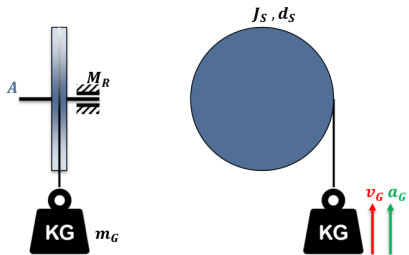
$M = J \cdot \dot{\omega}$   
 $E = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$

| Symbol | Name                                                                   | SI               | Symbol | Name                  | SI                |
|--------|------------------------------------------------------------------------|------------------|--------|-----------------------|-------------------|
| A      | Cross section                                                          | m <sup>2</sup>   | c      | Length of side c      | m                 |
| $J_s$  | Moment of inertia with reference to axis s through center of gravity S | kgm <sup>2</sup> | h      | Height                | m                 |
| $J_x$  | Moment of inertia with reference to the rotation axis x                | kgm <sup>2</sup> | l      | Length                | m                 |
| $J_y$  | Moment of inertia with reference to the rotation axis y                | kgm <sup>2</sup> | $r_s$  | Outer radius          | m                 |
| $J_z$  | Moment of inertia with reference to the rotation axis z                | kgm <sup>2</sup> | $r_i$  | Inner radius          | m                 |
| a      | Length of side a                                                       | m                | $\rho$ | Density               | kgm <sup>-3</sup> |
| b      | Length of side b                                                       | m                | $x_1$  | Point 1 on the x-axis | m                 |
|        |                                                                        |                  | $x_2$  | Point 2 on the x-axis | m                 |

| Body type               | Illustration | Mass, moments of inertia                                                                                                                                                           | Body type               | Illustration | Mass, moments of inertia                                                                                                                                                                         |
|-------------------------|--------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|--------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Circular cylinder, disc |              | $m = \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$<br>$J_s = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$<br>$J_x = J_y = \frac{1}{12} \cdot m \cdot (3r^2 + h^2)$                                           | Hollow sphere           |              | $m = \frac{4}{3} \cdot \rho \cdot \pi \cdot (r_o^3 - r_i^3)$<br>$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} \cdot m \cdot \frac{r_o^5 - r_i^5}{r_o^3 - r_i^3}$                                                |
| Hollow cylinder         |              | $m = \rho \cdot \pi \cdot (r_o^2 - r_i^2) \cdot h$<br>$J_s = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (r_o^2 + r_i^2)$<br>$J_x = J_y = \frac{1}{4} \cdot m \cdot (r_o^2 + r_i^2 + \frac{h^2}{3})$ | Cuboid                  |              | $m = \rho \cdot a \cdot b \cdot c$<br>$J_x = \frac{1}{12} \cdot m \cdot (b^2 + c^2)$                                                                                                             |
| Circular cone           |              | $m = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$<br>$J_s = \frac{3}{10} \cdot m \cdot r^2$<br>$J_x = J_y = \frac{3}{80} \cdot m \cdot (4r^2 + h^2)$                        | Thin rod                |              | $m = \rho \cdot A \cdot l$<br>$J_y = J_z = \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2$                                                                                                                       |
| Truncated circular cone |              | $m = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \pi \cdot (r_o^2 + r_i^2 + r_o \cdot r_i) \cdot h$<br>$J_s = \frac{3}{10} \cdot m \cdot \frac{r_o^5 - r_i^5}{r_o^3 - r_i^3}$                     | Square pyramid          |              | $m = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot a \cdot b \cdot h$<br>$J_x = \frac{1}{20} \cdot m \cdot (a^2 + b^2)$<br>$J_y = \frac{1}{20} \cdot m \cdot (b^2 + a^2)$                                         |
| Circular torus          |              | $m = 2 \rho \cdot \pi^2 \cdot R^2 \cdot r$<br>$J_x = J_y = \frac{1}{8} \cdot m \cdot (4R^2 + 5r^2)$<br>$J_z = \frac{1}{4} \cdot m \cdot (4R^2 + 3r^2)$                             | Arbitrary rotation body |              | $m = \rho \cdot \pi \cdot \int_{-r}^r \int_{-r}^r \int_{-r}^r dx \cdot dy \cdot dz$<br>$J_x = \frac{\rho}{2} \cdot \pi \cdot \int_{-r}^r \int_{-r}^r \int_{-r}^r y^2 \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ |
| Sphere                  |              | $m = \frac{4}{3} \cdot \rho \cdot \pi \cdot r^3$<br>$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2$                                                                              | Steiner's theorem       |              | $J_x = m \cdot r_c^2 + J_{xc}$                                                                                                                                                                   |

|                                  |  |                                                                                                                                                                                                                          |
|----------------------------------|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Dünner Stab                      |  | $J_x = 0$<br>$J_y = J_z = \frac{1}{3} m l^2$<br>$J_{ys} = J_{zs} = \frac{1}{12} m l^2$                                                                                                                                   |
| Mit Masse belegte Kreisscheibe   |  | $J_x = J_y = \frac{1}{4} m r^2$<br>$J_z = \frac{1}{2} m r^2$                                                                                                                                                             |
| Mit Masse belegte Rechteckfläche |  | $J_x = \frac{1}{12} m h^2$<br>$J_y = \frac{1}{12} m b^2$<br>$J_z = \frac{1}{12} m (b^2 + h^2)$<br>$J_{x'} = \frac{1}{3} m h^2$<br>$J_{y'} = \frac{1}{3} m b^2$<br>$J_A = \frac{1}{6} m \frac{h^2 b^2}{D^2}$              |
| Hohlkugel                        |  | $m = \frac{4}{3} \pi \rho (r_o^3 - r_i^3)$<br>$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} m \frac{(r_o^5 - r_i^5)}{(r_o^3 - r_i^3)}$<br>Dünnwandige Hohlkugel<br>$r_i \approx r_o \approx r$<br>$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{3} m r^2$ |

# Forces et couples effectifs



Tenir compte de:

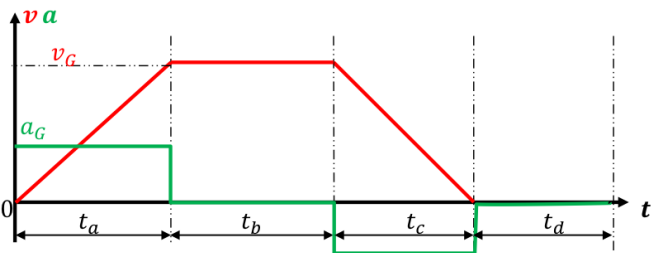
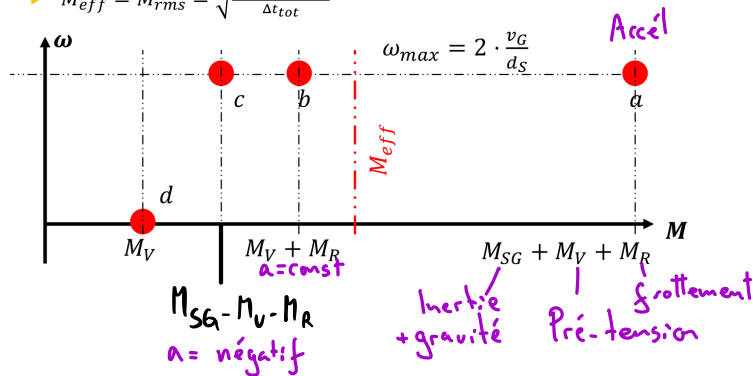
- Frottement
- Pré-contraintes
- Direction mouv.
- Inertie (moment)

*influence*

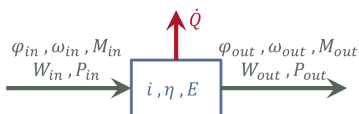
Pour dimensionner le moteur, on utilise:

- ①  $\omega_{max}$  et  $M_{max}$  (couple max)
- ② Le couple effectif  $M_{eff}$  pour l'échauffement du moteur

$$M_{eff} = M_{rms} = \sqrt{\frac{\sum_j \Delta t_j \cdot M_{jmax}^2}{\Delta t_{tot}}}$$



# Transmissions



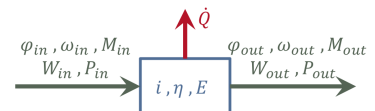
$$i = \frac{\omega_{in}}{\omega_{out}} = \frac{\varphi_{in}}{\varphi_{out}} = \frac{\dot{\omega}_{in}}{\dot{\omega}_{out}}$$

|   |           |                         |
|---|-----------|-------------------------|
| E | [J]       | Energie emmagasinée     |
| J | [kg · m²] | Moment d'inertie        |
| M | [N · m]   | Couple                  |
| P | [W]       | Puissance               |
| Q | [J]       | Pertes d'énergie        |
| W | [J]       | Travail                 |
| i | [-]       | Rapport de transmission |
| m | [kg]      | Masse                   |
| p | [m]       | Pas de la vis           |
| η | [-]       | Rendement               |
| φ | [rad]     | Angle de déplacement    |
| ω | [rad/s]   | vitesse angulaire       |

$$i_{tot} = \prod_k i_k$$

Δ Selon le cas  
i peut avoir  
une unité!  
S: mouvement  
rotation → linéaire

# Rendement



Wirkungsgrad | Rendement

$$\eta = \frac{W_{out}}{W_{in}} = \frac{P_{out}}{P_{in}}$$

$$\eta_{tot} = \prod_k \eta_k$$

η = 1 ; Q = 0  
Système sans perte

Verlorene Energie | Énergie perdue

$$Q = W_{in} - W_{out} = W_{in}(1 - \eta) = \frac{1 - \eta}{\eta} W_{out}$$

η = 0 ; Q = W\_in  
tout travail perdu en chaleur

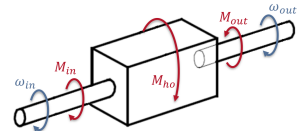
Verlorene Leistung | Puissance perdue

$$\dot{Q} = P_1 - P_2 = P_1(1 - \eta) = \frac{1 - \eta}{\eta} P_2$$

η < 0 ; Q > W\_in  
Système bloqué

# Couples

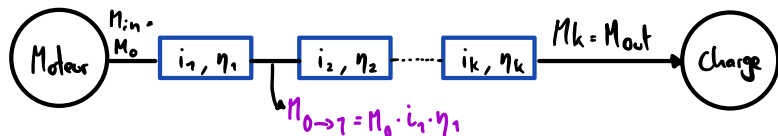
$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{\omega_{out} \cdot M_{out}}{\omega_{in} \cdot M_{in}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{M_{out}}{M_{in}}$$



$$M_{out} = M_{in} \cdot \eta \cdot i$$

$$M_{ho} = M_{in} \cdot (\eta \cdot i - 1)$$

Le moment perdu à cause du rendement est transmis au borbier, à la structure.



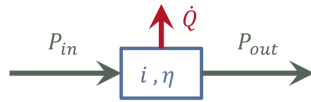
$$M_{q \rightarrow k} = M_q \cdot \prod_{r=q+1}^k i_r \cdot \eta_r$$

Pour calculer un moment à un point du système, il faut "déplacer" les moments sur ce point

# ► Réversibilité

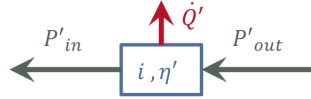
## ► Normalfall | Cas normal

- $\dot{Q} = P_{in} - P_{out}$
- $\eta = P_{out} / P_{in}$



## ► Gegenrichtung | Cas à l'envers

- $\dot{Q}' = P'_{out} - P'_{in}$
- $\eta' = P'_{in} / P'_{out}$



## Hypothèse 1: $E_{perdue} \propto E_{in}$

$$\frac{\dot{Q}}{P_{in}} = \frac{\dot{Q}'}{P'_{out}} \rightarrow \frac{P_{in} - P_{out}}{P_{in}} = \frac{P'_{out} - P'_{in}}{P'_{out}}$$

$$\rightarrow 1 - \frac{P_{out}}{P_{in}} = 1 - \frac{P'_{in}}{P'_{out}} \rightarrow 1 - \eta = 1 - \eta'$$

$$\eta = \eta'$$

$\Rightarrow$  Le rendement est le même si on change la direction.

## Hypothèse 2: $E_{perdue} \propto E_{out}$

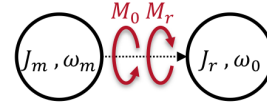
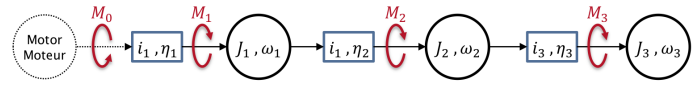
$$\frac{\dot{Q}}{P_2} = \frac{\dot{Q}'}{P'_2} \rightarrow \frac{P_1 - P_2}{P_2} = \frac{P'_2 - P'_1}{P'_2} \rightarrow \frac{P_1}{P_2} - 1 = 1 - \frac{P'_1}{P'_2} \rightarrow \frac{1}{\eta} - 1 = 1 - \eta'$$

$$\eta' = 2 - \frac{1}{\eta} \rightarrow \eta' < \eta$$

$$\eta' \leq 0 \text{ if } \eta \leq 0.5 \Rightarrow \text{systeme bloqué}$$

# ► Entraînement réduit

On focalise les moments et inertie sur le moteur. Cela simplifie le système et permet de le dimensionner.



## Freinage

$$M_r = \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{\prod_{k=1}^i i_k \cdot \eta_k}$$

$$M_r = \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{\prod_{k=1}^i i_k \cdot \eta_k^{-1}}$$

$$J_r = \frac{2}{\omega_0^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{\prod_{k=1}^i \eta_k}$$

$$J_r = \frac{2}{\omega_0^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{\prod_{k=1}^i \eta_k^{-1}}$$

Les moments et inerties diminuent lors du freinage.

# ► Moteur optimal

- l'accélération d'un système est maximale lorsque le moment d'inertie réduit du système est égal au moment d'inertie du moteur.

$$J_r = J_m$$

- Si on fait le même raisonnement en essayant de rechercher quel est le moteur le plus petit pour effectuer un déplacement dans un temps donné, on trouvera aussi le même résultat.

- Dans la pratique, il n'est pas toujours possible de choisir le moment d'inertie du moteur exactement identique au moment d'inertie réduit du système. On fera par contre attention de rester dans les limites suivantes :

- $J_m = (0.1 \dots 1) \cdot J_r$
- $J_r = (1 \dots 10) \cdot J_m$