

Formulaire mécanique des structures

Force

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_{\text{ext},i} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt}$$

$[F]$	=	N	force extérieure résultante
$[m]$	=	kg	masse
$[v]$	=	m s^{-1}	vitesse
$[t]$	=	s	temps

$$\sum_i \vec{F}_{\text{ext},i} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a}$$

Pression

$$\vec{F} = \int_A p d\vec{A}$$

Statique plane

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i F_{x,i} = 0 \\ \sum_i F_{y,i} = 0 \\ \sum_i M_{Oz,i} = \sum_i (x_i F_{y,i} - y_i F_{x,i}) + \sum_k M_{z,k}^{\uparrow\downarrow} = 0 \end{array} \right.$$

$[x_i, y_i]$	=	m	composantes des vecteurs lieu des forces $\vec{F}_i$
$[F_{x,i}, F_{y,i}]$	=	N	composantes du vecteur force $\vec{F}_i$
$[M_{z,k}^{\uparrow\downarrow}]$	=	N m	composantes du moment du couple de forces k

Degré de liberté

$$k = p + 2n + g - 3m$$

$k=0$: isostatique
 $k>0$: hyperstatique
 $k<0$: hypostatique

$[k]$	=	1	degré d'hyperstaticité
$[p]$	=	1	valence de l'appuiement
$[n]$	=	1	nombre d'articulations
$[g]$	=	1	nombre de glissières
$[m]$	=	1	nombre d'éléments

Frottement

Adhérence :

$$H = mg \sin \alpha \leq \mu_S R_n$$

$[H]$	=	N	force d'adhérence
$[mg]$	=	N	poids
$[\alpha]$	=	rad	angle d'inclinaison
$[\mu_S]$	=	1	facteur d'adhérence
$[R_n]$	=	N	force de contact normale entre les surfaces
$[\alpha_{\text{lim}}]$	=	rad	angle limite d'adhérence

Limite d'adhérence :

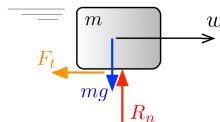
$$H_{\text{lim}} = \mu_S R_n = mg \sin \alpha_{\text{lim}}$$

$$\mu_S mg \cos \alpha_{\text{lim}} = mg \sin \alpha_{\text{lim}}$$

$$\mu_S = \frac{\sin \alpha_{\text{lim}}}{\cos \alpha_{\text{lim}}} = \tan \alpha_{\text{lim}}$$

Glissement →

$$\vec{F}_t = -\mu R_n \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$$



$[F_t]$	=	N	force de frottement
$[\mu]$	=	1	facteur de frottement dynamique
$[R_n]$	=	N	force de contact normale entre les surfaces
$[w]$	=	m s^{-1}	vitesse relative entre les surfaces

Frottement courroie

$$N_{\text{menant}} = N_{\text{mené}} \cdot e^{\mu \varphi_{\text{um}}}$$

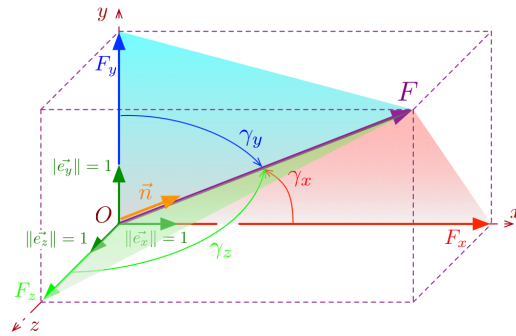
$[\varphi_{\text{um}}]$	=	rad	angle d'enroulement
$[\mu]$	=	1	facteur de frottement dynamique
$[N_{\text{menant}}]$	=	N	Force de traction dans le brin tendu
$[N_{\text{mené}}]$	=	N	Force de traction dans le brin mou

Résistance roulement

$$F_{rr} = f_r R_n = \frac{e_r}{r} R_n$$

$[F_{rr}]$	=	N	résistance au roulement
$[f_r]$	=	1	facteur de résistance au roulement
$[R_n]$	=	N	force de contact normale entre les surfaces
$[e_r]$	=	m	coefficient de résistance au roulement
$[r]$	=	m	rayon de roulement

Angle directeur et vecteur unité



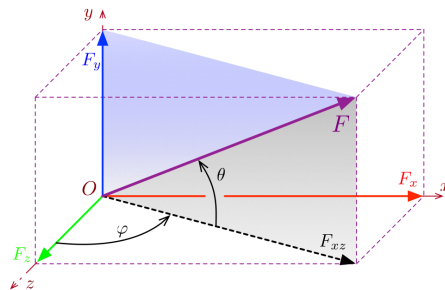
$$\begin{cases} F_x = \vec{F} \cdot \vec{e}_x = F \cos \gamma_x \\ F_y = \vec{F} \cdot \vec{e}_y = F \cos \gamma_y \\ F_z = \vec{F} \cdot \vec{e}_z = F \cos \gamma_z \end{cases}$$

$$n_{j,i} = \cos \gamma_{j,i} = \frac{F_{j,i}}{\|\vec{F}_i\|} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} j = x, y, z \\ i = A, B, C, \dots \vee 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$\vec{n}_i = \begin{Bmatrix} n_{x,i} \\ n_{y,i} \\ n_{z,i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \gamma_{x,i} \\ \cos \gamma_{y,i} \\ \cos \gamma_{z,i} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\|\vec{F}_i\|} \cdot \begin{Bmatrix} F_{x,i} \\ F_{y,i} \\ F_{z,i} \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

où $\vec{n}_i$ est un vecteur unité qui a la même direction et le même sens que la force $\vec{F}_i$ sur laquelle il est construit.

Coordonnées sphériques



$$\begin{cases} \cos \gamma_x = \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \gamma_y = \sin \theta \\ \cos \gamma_z = \cos \theta \cos \varphi \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \cos \theta \sin \varphi \\ F \sin \theta \\ F \cos \theta \cos \varphi \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

$[F]$	=	N	intensité de la force
$[\varphi]$	=	rad	azimut ; dans les engrenages : angle d'inclinaison de denture β
$[\theta]$	=	rad	élévation ; dans les engrenages : angle de pression $\alpha = 20^\circ$

Statique spatiale

∑ forces ∑ des moments

$$\begin{cases} \sum_i F_{x,i} = 0 \\ \sum_i F_{y,i} = 0 \\ \sum_i F_{z,i} = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} \sum_i (y_i F_{z,i} - z_i F_{y,i}) + \sum_k M_{x,k}^{\uparrow\downarrow} = 0 \\ \sum_i (z_i F_{x,i} - x_i F_{z,i}) + \sum_k M_{y,k}^{\uparrow\downarrow} = 0 \\ \sum_i (x_i F_{y,i} - y_i F_{x,i}) + \sum_k M_{z,k}^{\uparrow\downarrow} = 0 \end{cases}$$

"M_{ox}"
"M_{oy}"
"M_{oz}"

$[x_i, y_i, z_i] = \text{m}$ composantes des vecteurs lieu des forces $\vec{F}_i$
 $[F_{x,i}, F_{y,i}, F_{z,i}] = \text{N}$ composantes du vecteur force $\vec{F}_i$
 $[M_{x,k}^{\uparrow\downarrow}, M_{y,k}^{\uparrow\downarrow}, M_{z,k}^{\uparrow\downarrow}] = \text{Nm}$ composantes du moment du couple de forces k

Moment dans l'espace

$$\vec{M}_O = \begin{Bmatrix} M_{Ox} \\ M_{Oy} \\ M_{Oz} \end{Bmatrix} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} yF_z - zF_y \\ zF_x - xF_z \\ xF_y - yF_x \end{Bmatrix} \quad (4)$$

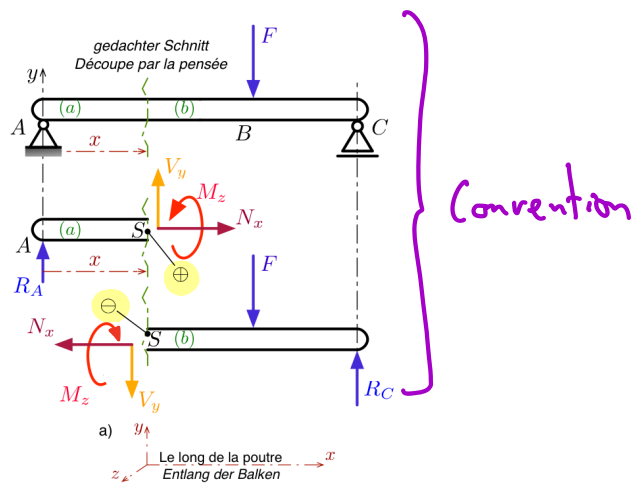
$[M_{Oj}] = \text{Nm}$ composantes du moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point O
 $[x, y, z] = \text{m}$ composantes du vecteur lieu de la force $\vec{F}$
 $[F_j] = \text{N}$ composantes du vecteur force $\vec{F}$
 $j = x, y, z$

Degré de liberté

$$k = p + 3n + \text{Valence}(\text{autres liaisons}) - 6m$$

$[k] = 1$ degré d'hyperstaticité
 $[p] = 1$ valence de l'appuiement
 $[n] = 1$ nombre d'articulations
 $[m] = 1$ nombre d'éléments

Efforts intérieurs



Convention

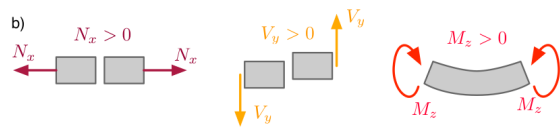


FIGURE 6.5 – Signes des efforts intérieurs

		Schnittufer Faces	
		⊕	⊖
Schnittgröße Efforts intérieur	⊕	⊕	⊖
	⊖	⊖	⊕

V_y = effort tranchant
 N_x = effort normal
 M_z = moment fléchissant

Déterminer les efforts :

1. Calculer les réactions d'appui
2. Etablir les domaines de découpe de la poutre
3. Dessiner les efforts intérieurs
4. Calculer les efforts
5. Etablir le diagramme

en 2D

$$\begin{cases} \sum_{(a)} F_{x,i} + N(x) = 0 \\ \sum_{(a)} F_{y,i} + V_y(x) = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} \sum_{(a)} M_{S_{z,i}} + \sum_{(a)} M_{z,k}^{\uparrow\downarrow} + M_z(x) = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

en 3D

$$\begin{cases} \sum_{(a)} F_{x,i} + N(x) = 0 \\ \sum_{(a)} F_{y,i} + V_y(x) = 0 \\ \sum_{(a)} F_{z,i} + V_z(x) = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} \sum_{(a)} M_{S_{z,i}} + \sum_{(a)} M_{x,k}^{\uparrow\downarrow} + M_x(x) = 0 \\ \sum_{(a)} M_{S_{y,i}} + \sum_{(a)} M_{y,k}^{\uparrow\downarrow} + M_y(x) = 0 \\ \sum_{(a)} M_{S_{x,i}} + \sum_{(a)} M_{z,k}^{\uparrow\downarrow} + M_z(x) = 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

$[F_{x,i}, F_{y,i}, F_{z,i}] = \text{N}$ composantes des forces extérieures
 $[M_{S_{x,i}}, M_{S_{y,i}}, M_{S_{z,i}}] = \text{Nm}$ composantes des moments extérieurs
 $[M_{x,k}^{\uparrow\downarrow}, M_{y,k}^{\uparrow\downarrow}, M_{z,k}^{\uparrow\downarrow}] = \text{Nm}$ composantes du moment du couple de forces k
 $[N(x)] = \text{N}$ effort normal
 $[V_y(x), V_z(x)] = \text{N}$ efforts tranchants
 $[M_x(x)] = \text{Nm}$ moment de torsion
 $[M_y(x), M_z(x)] = \text{Nm}$ moments fléchissants

Charge linéique

force surfacique: $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
 force volumique: $\frac{\text{N}}{\text{m}^3}$

$$Q_{AB} = \int_{x=a}^b q(x) dx \quad (6.5)$$

$[Q_{AB}] = \text{N}$ force concentrée statiquement équivalente
 $[q(x)] = \text{N/m}$ distribution de la charge linéique entre A et B

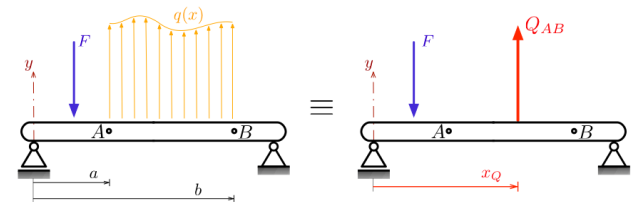


FIGURE 6.8 – Charge concentrée équivalente

et la position de sa ligne d'action x_Q s'obtient en appliquant l'équivalence des moments

$$x_Q = \frac{\int_{x=a}^b x \cdot q(x) dx}{Q_{AB}} \quad (6.6)$$

$[x_Q] =$ position de la ligne d'action de la force concentrée équivalente
 $[q(x)] = \text{N/m}$ distribution de la charge linéique entre A et B
 $[Q_{AB}] = \text{N}$ force concentrée statiquement équivalente

Relations différentielles des efforts

⚠️ Lors de l'intégration, pas oublier la constante +C!

$$q(x) = \frac{d^2 M_z}{dx^2}$$

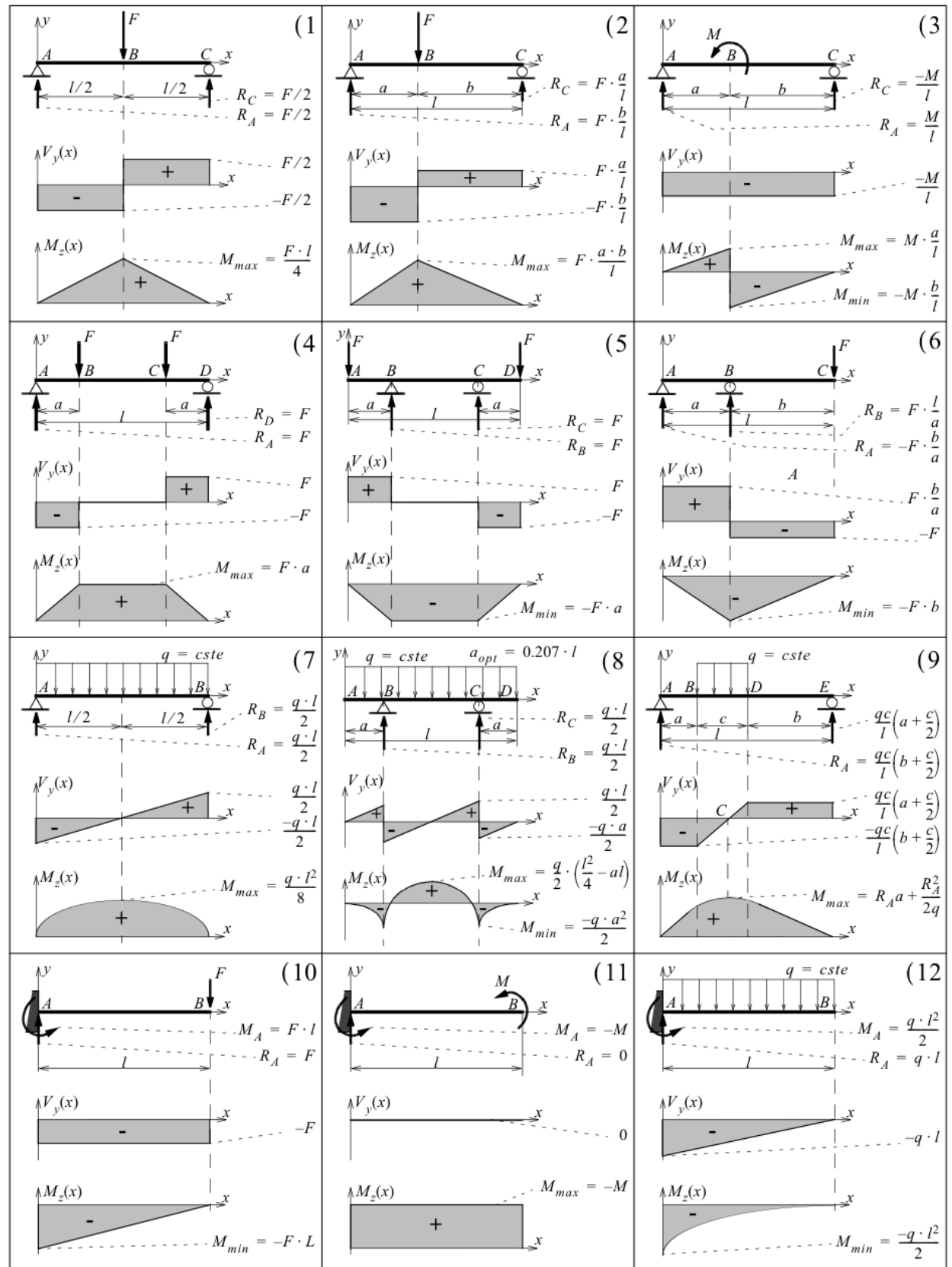
$$q(x) = -\frac{dV_y}{dx}$$

$$V_y(x) = -\frac{dM_z}{dx}$$

⇒ Evaluer les constantes pour $V_y(x=0)$ et $M_z(x=0)$

$$V_y(x) = -\int q(x) \cdot dx \quad M_z(x) = -\int V_y(x) dx = \iint q(x) dx dx$$

A4: Moments de Flexion & Efforts Tranchants de Cas Standards Biegemomente- & Querkraftlinien für Standardfälle



Centroides

Dans un champ de gravité homogène, centre de gravité, de masse et de volume sont les mêmes

Centre de masse

$$x_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad y_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad z_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i$$

$$m_i = \rho \cdot V_i \quad M = \rho \cdot V$$

Vecteur lieu du centre de masse:

$$\vec{r}_I = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_I = \frac{\int \vec{r} \cdot \rho dV}{\int \rho dV}$$

$[\vec{r}] = \text{m}$ vecteur lieu du centre de masse I
 $[V] = \text{m}^3$ volume du corps
 $[\vec{r}] = \text{m}$ vecteur lieu du volume élémentaire dV
 $[\rho] = \text{kg m}^{-3}$ masse volumique

Centre de gravité

$y_g = \text{indéfinie}$

$$z_G = \frac{\sum_i z_{G_i} \cdot \Delta m_i \cdot g}{\sum_i \Delta m_i \cdot g} \quad x_G = \frac{\sum_i x_{G_i} \cdot \Delta m_i \cdot g}{\sum_i \Delta m_i \cdot g}$$

$[x_G, y_G, z_G] = \text{m}$ coordonnées du centre de gravité G
 $[x_{G_i}, y_{G_i}, z_{G_i}] = \text{m}$ coordonnées du centre de gravité de l'élément i
 $[\Delta m_i] = \text{kg}$ masse de l'élément i
 $[g] = \text{m s}^{-2}$ accélération locale due à la pesanteur

Centroide de surface composée

$$x_s = \frac{\sum_i x_{S_i} \cdot \Delta A_i}{\sum_i \Delta A_i}; \quad y_s = \frac{\sum_i y_{S_i} \cdot \Delta A_i}{\sum_i \Delta A_i}; \quad z_s = \frac{\sum_i z_{S_i} \cdot \Delta A_i}{\sum_i \Delta A_i}$$

$[x_s, y_s, z_s] = \text{m}$ coordonnées du centroide S
 $[x_{S_i}, y_{S_i}, z_{S_i}] = \text{m}$ coordonnées du centroide de l'élément i
 $[\Delta A_i] = \text{m}^2$ aire de l'élément i

Centroide de Volume

$$x_s = \frac{\int x \cdot dV}{V}; \quad y_s = \frac{\int y \cdot dV}{V}; \quad z_s = \frac{\int z \cdot dV}{V}$$

$[x_s, y_s, z_s] = \text{m}$ coordonnées du centroide S
 $[V] = \text{m}^3$ volume du corps
 $[x, y, z] = \text{m}$ coordonnées du volume élémentaire dV

$$m = \int_V \rho dV = \rho \int_V dV = \rho V$$

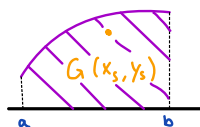
Aire d'une surface

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad \text{si } f \geq 0$$

Centre de gravité surface:

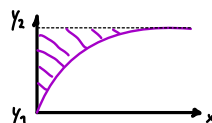
$$x_G = \frac{1}{A} \int_a^b x f(x) dx$$

$$y_G = \frac{1}{2A} \int_a^b f(x)^2 dx \quad \Delta \text{ pour } f \geq 0$$



Aire entre courbe et O_y

$$A_y = \int_{y_1}^{y_2} f^{-1}(y) dy$$



Prisma, Zylinder (gerade oder schief) $z_S = h/2$	abgeschrägter Kreiszylinder (gerade oder schief) $x_S = r^2 \tan \alpha / (4h)$ $z_S = h/2 + r^2 \tan^2 \alpha / (8h)$	Kegel, Pyramide (gerade oder schief) $z_S = h/4$	Pyramiden- bzw. Kegelstumpf bzw. $z_S = \frac{h}{4} \cdot \frac{r_1^2 + 2r_1r_2 + 3r_2^2}{r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2}$
Keil $z_S = \frac{h}{2} \cdot \frac{a_1 + a_2}{2a_1 + a_2}$	Keilstumpf $z_S = \frac{h}{2} \cdot \frac{a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_2b_2}{2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 2a_2b_2}$	Zylinderhuf $x_S = 3\pi/16$ $z_S = 3\pi/32$	Kugelabschnitt $z_S = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r-h)^2}{(3r-h)}$
Halbkugel $z_S = 3r/8$ halbe Hohlkugel: $z_S = \frac{3}{8} \cdot \frac{r_0^4 - r_1^4}{r_0^3 - r_1^3}$	Kugelausschnitt $z_S = 3r(1 + \cos \alpha) / 8$ $= 3(2r - h) / 8$	Rotationsparaboloid $z_S = h/3$	Ellipsoid $z_S = 3h/8$
ebene Flächen			
Dreieck $y_S = h/3$	Parallelogramm $y_S = h/2$	Trapez $y_S = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b}$	Kreisausschnitt $y_S = 2r \sin \alpha / (3\alpha)$ $= 2r / (3b)$ Halbkreisfläche: $y_S = 4r / (3\pi)$
Kreisabschnitt $y_S = \frac{2}{3} \cdot \frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ Halbkreisfläche: $y_S = 4r / (3\pi)$	Kreisringstück $y_S = \frac{2}{3} \cdot \frac{(r_0^3 - r_1^3) \sin \alpha}{(r_0^2 - r_1^2) \alpha}$	Parabelflächen $x_{S1} = 3a/8$ $y_{S1} = 2h/5$ $x_{S2} = 3a/4$ $y_{S2} = 3h/10$	Parabelabschnitt $y_S = 2h/5$
Ellipsenabschnitt $y_S = \frac{2}{3} \cdot \frac{b \sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$	räumliche Oberflächen		
Kugelzone bzw. -haube $z_S = (r/2)(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) = h_0 + h/2$ bzw. $z_S = (r/2)(1 + \cos \alpha_2) = (h_0 + r)/2$		Mantel von Pyramide und Kegel $z_S = h/3$	Mantel von Kreiskegelstumpf $z_S = \frac{h}{3} \cdot \frac{r_1 + 2r_2}{r_1 + r_2}$

► STRME2

Justification de sécurité

$$\alpha = \frac{\sigma_v}{\sigma_{adm}} \cdot j \leq 1$$

↳ donné dans énoncé

$$S = \frac{\sigma_{adm}}{\sigma_v} \leq S_{req}$$

σ_v : contrainte de comparaison
 σ_{adm} : contrainte admissible
 j : Facteur de séc. exigé
 S_{req} : Sécurité exigée

Hypothèses

1. Matériau est considéré: continu (pas de particules)
 homogène
 isotrope (même propriétés ex x, y, z)
2. On considère: des petits changements linéaires.
 de petites déformations
3. Section transversale constante (plane)
4. Aucune contrainte résiduelles

Probabilité de survie

D'après la FKH, la probabilité d'échec doit être inférieure à 2,5 %
 $\Rightarrow$ survie à 97,5 %.
 C'est une défaillance donc on en tient pas compte dans les exercices!

► Lois Constitutives

cas constant

Pression

$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$

$$1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2$$

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ GPa} = 1 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$$

⊖ → Compression

⊕ → traction

Loi de Hook

$$E = \frac{\Delta \sigma}{\Delta \epsilon}$$

↳ "pente"

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

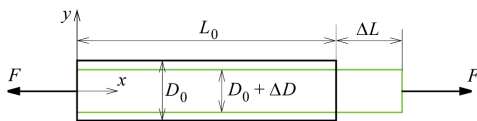
$$F = E \cdot E \cdot A$$

Allongement

$$\epsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0}$$

ν : coeff poisson [-]

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \cdot \epsilon_x \quad \left(\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} (1 - 2 \cdot \nu) \right)$$



$$\epsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0}$$

$$\epsilon_r = \epsilon_y = \epsilon_z = \frac{\Delta D}{D_0} = \frac{\Delta H}{H_0} = \frac{\Delta B}{B_0}$$

Loi constitutive: $\Delta L = \frac{N \cdot L_0}{A_0 \cdot E}$

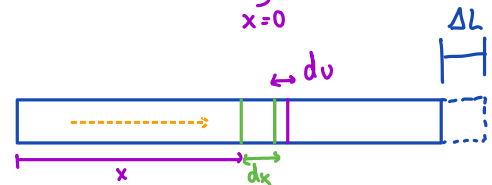
cas général

Force normale $\neq$ const.
 Section $\neq$ const.
 (E-Module $\neq$ const)

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)}$$

$$\sigma(x) = \epsilon(x) \cdot E(x)$$

$$\epsilon(x) \cdot dx = du \quad \Delta L = \int_{x=0}^{L_0} \epsilon(x) dx$$



$$\Delta L = \int_{x=0}^{L_0} \frac{N(x)}{A(x) \cdot E(x)} dx = \int_{x=0}^{L_0} \frac{\sigma(x)}{E(x)} dx$$

► Allong. thermique $\epsilon_\theta = \alpha \cdot \Delta \theta$

$$\Delta L_\theta = \alpha \cdot \Delta \theta \cdot L_0$$

α : coefficient de dilatation [K^{-1}]

$\Delta \theta$: changement temp. [K ou $^{\circ}C$]

Allongement tot. $\epsilon_{tot} = \epsilon_\sigma + \epsilon_\theta$

$$\Delta L_{tot} = \left(\frac{N}{A_0 \cdot E} + \alpha \cdot \Delta \theta \right) \cdot L_0$$

► Système hyperstatique M&S

- ① Equations d'équilibre, forces et moments extérieur et intérieur
 $\Rightarrow$ Qualitative equations : EQ $\Rightarrow N = F$ (STRME 1)
- ② Equations de cinématique (liens allongement entre les corps)
 $\Rightarrow$ "CN"
- ③ Equations constitutives (liens entre allongement et efforts)
 $\Rightarrow$ "CE"

- (A) Esquisses
 (B) Libérations des corps
 (C) Rangement
 (D) équations

► Energie de déformation

$\Sigma W = \text{const.}$ $W = \int_0^S \vec{F} \cdot d\vec{s}$
 $\nwarrow$ travail

Extérieur : $W = \frac{1}{2} \cdot F \cdot \Delta L$ [J]
 Intérieur : $U = \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2 \cdot L_0}{E \cdot A_0}$ [J] $\left. \vphantom{\frac{1}{2} \cdot \frac{N^2 \cdot L_0}{E \cdot A_0}} \right\} N, A_0, E = \text{cste}$

Déformation "volumique" $u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \epsilon$ [J · m⁻³]

Cas général : $W = U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2(x)}{E(x) \cdot A_0(x)} \cdot dx$ $\left. \vphantom{\frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2(x)}{E(x) \cdot A_0(x)} \cdot dx} \right\} N, A_0, E \neq \text{cste}$

► Cisaillement simple

Contrainte moyenne cisa :

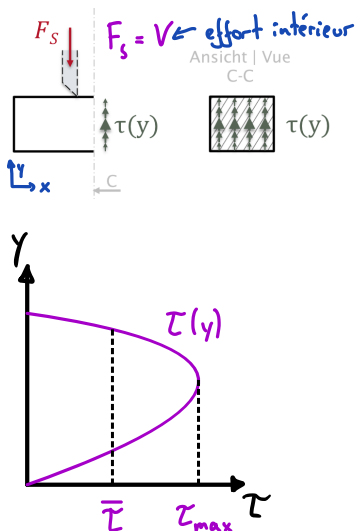
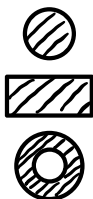
$\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau} = \frac{V}{A}$

$\downarrow$ face en x, direction y

$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \bar{\tau}$

$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \bar{\tau}$

$\tau_{\max} = 2 \cdot \bar{\tau}$



Schiebung
Distorsion angulaire

$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$

Schubmodul
Module de cisaillement

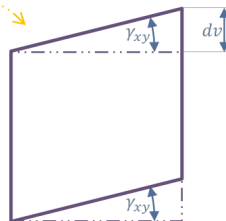
$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$

Formänderungsenergie
Energie de déformation

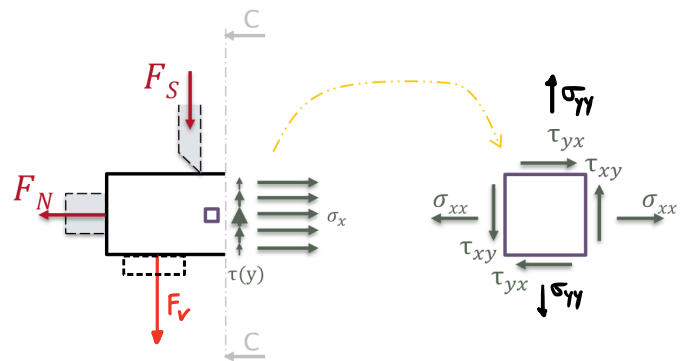
$U = \frac{1}{2} \cdot \eta \cdot \frac{V^2 \cdot h}{A \cdot G}$

$\eta_{\square} = \frac{6}{5}$
 $\eta_{\circ} = \frac{10}{9}$

$V, A, G = \text{cste}$

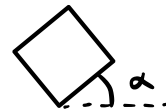


► Tenseur des contraintes



Tenseur 2D : $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$

Le tenseur est tourné d'un angle α pour obtenir les contraintes principales σ_1, σ_2
 $\rightarrow$ le cisaillement est 0



$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

$\sigma_1 > \sigma_2$ Δ

$\sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right)$

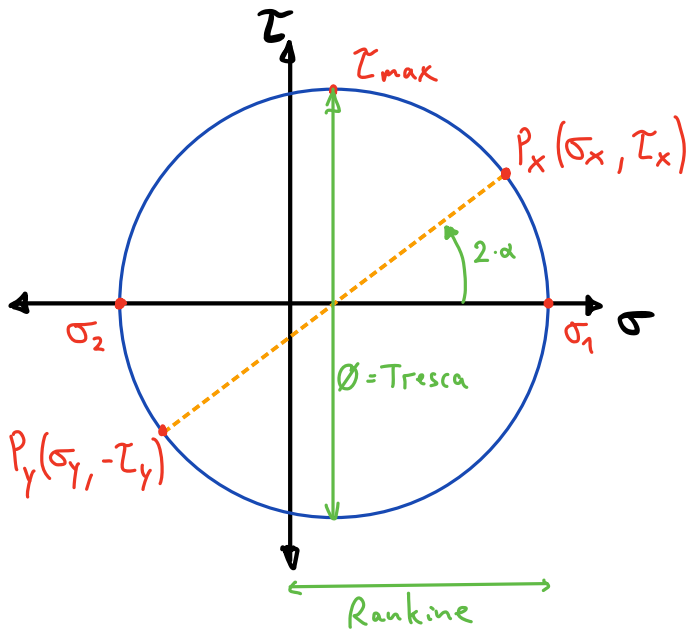
ou le cisaillement max (contrainte de cisaillement principale)

$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

► Cercle de Mohr

1. Système de coordonnées σ, τ
2. Points $P_x(\sigma_x, \tau_x)$ et $P_y(\sigma_y, -\tau_y)$
3. Cercle passant par P_x et P_y , centre sur l'axe σ

- σ_1 : Point d'inters. de l'axe σ avec cercle, **droite**
- σ_2 : Point d'inters. de l'axe σ avec cercle, **gauche**
- α : $\frac{1}{2}$ angle σ -axe à la ligne P_x et P_y
- τ_{max} : $Max(\tau)$ sur le cercle



► Justification structurale

$$\alpha = \frac{\sigma_V}{\sigma_{adm}} \cdot j \leq 1$$

Nachweis über Auslastungsgrade | Justification avec capacités

$$S = \frac{\sigma_{adm}}{\sigma_V} \geq S_{req}$$

Nachweis über Sicherheiten | Justification avec sécurité

- α Capacité
- σ_V Contrainte de comparaison
- σ_{adm} Contrainte admissible
- j Facteur de sécurité exigé
- S_{req} Sécurité exigée

► Contrainte comparaison (physique)

Hypothèse tension normale Rankine

$$\sigma_V = \sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Pour matériau fragile ou chocs

Hyp. contrainte cisaillement Tresca

$$\sigma_V = 2 \cdot \tau_{max} = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Hyp. changement de forme von Mises

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx} \cdot \sigma_{yy} + 3 \cdot \tau_{xy}^2}$$

► Principe justification FKM

$$\alpha = \frac{\sigma_V}{\sigma_{adm}} \cdot j \leq 1$$

Nachweis über Auslastungsgrade | Justification avec capacités

$$S = \frac{\sigma_{adm}}{\sigma_V} \geq S_{req}$$

Nachweis über Sicherheiten | Justification avec sécurité

- α Capacité
- σ_V Contrainte de comparaison
- σ_{adm} Contrainte admissible
- j Facteur de sécurité exigé
- S_{req} Sécurité exigée

$$\sigma_V = q \cdot \tau_{xy} + (1 - q) \cdot \sqrt{3} \cdot \tau_{xy}$$

facteur de ductilité $q \rightarrow q = 1$ fragile
 $q = 0$ ductile

► Preuve d'adhésion (collage)

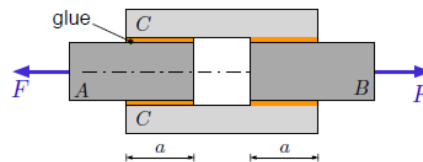
$$\alpha = \frac{\bar{\tau}}{\tau_{adm}} \cdot j \leq 1$$

Nachweis über Auslastungsgrade | Justification avec capacités

$$S = \frac{\tau_{adm}}{\bar{\tau}} \geq S_{req}$$

Nachweis über Sicherheiten | Justification avec sécurité

- α Capacité
- $\bar{\tau}$ Cisaillement moyenne
- τ_{adm} Résistance au cisaillement
- j Facteur de sécurité exigé
- S_{req} Sécurité exigée



► Propriétés des surfaces

► Centre gravité

$$y_S = \frac{S_z}{A} = \frac{\int_A y \cdot dA}{\int_A dA}$$

$$y_S = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum_i (y_{Si} \cdot A_i)}{\sum_i (A_i)}$$

$$z_S = \frac{S_y}{A} = \frac{\int_A z \cdot dA}{\int_A dA}$$

$$z_S = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_i (z_{Si} \cdot A_i)}{\sum_i (A_i)}$$

→ Profiter des axes de symétrie
→ Trou = surface négative

► Moment statique

Pour définir le centre de gravité

$$S_z = \int_A y \cdot dA$$

$$S_y = \int_A z \cdot dA$$

$[A] = m^3$

$$y_S = \frac{S_z}{A}$$

$$z_S = \frac{S_y}{A}$$

Flächenschwerpunkt
Centre de gravité de la surface

► Moment quadratique

Mesure de la résistance à la flexion d'une section le long d'un axe de référence.

$$I_z = \int_A y^2 \cdot dA$$

$$I_y = \int_A z^2 \cdot dA$$

$$[A] = m^4$$

$I_{yz} = 0$ si au moins un axe est axe de symétrie

Moment polaire d'une section

$$I_{yz} = \int_A (y \cdot z) \cdot dA$$

$$I_p = \int_A \underbrace{\rho^2}_{y^2+z^2} \cdot dA = I_y + I_z$$

$\rho = \sqrt{y^2+z^2}$

► Translation axe (Steiner)

Translater système axe de l'objet (passant par son centre) vers autre système d'axe

$$I_{y'} = I_y + z_S'^2 \cdot A$$

$$I_{z'} = I_z + y_S'^2 \cdot A$$

$$I_{y'z'} = I_{yz} + z_S' \cdot y_S' \cdot A$$

distance y entre deux systèmes

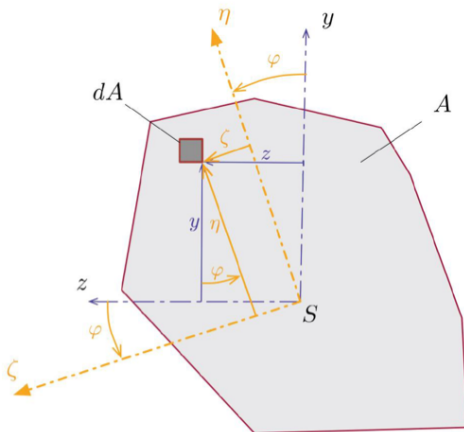
$$I_y = \sum_i (I_{y_i} + z_{Si}^2 \cdot A_i)$$

$$I_z = \sum_i (I_{z_i} + y_{Si}^2 \cdot A_i)$$

$$I_{yz} = \sum_i (I_{yz_i} + z_{Si} \cdot y_{Si} \cdot A_i)$$

distance jusqu'à autre système axe.

► Rotation système d'axe passant par centre gravité



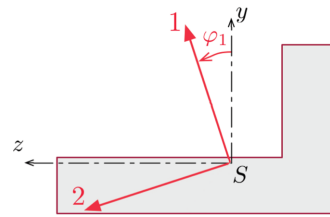
$$I_\eta = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \cos(2 \cdot \varphi) - I_{yz} \cdot \sin(2 \cdot \varphi)$$

$$I_\zeta = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \cos(2 \cdot \varphi) + I_{yz} \cdot \sin(2 \cdot \varphi)$$

$$I_{\zeta\eta} = \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \sin(2 \cdot \varphi) + I_{yz} \cdot \cos(2 \cdot \varphi)$$

► Axe principaux

Axe selon lequel un objet se plie "naturellement"



$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

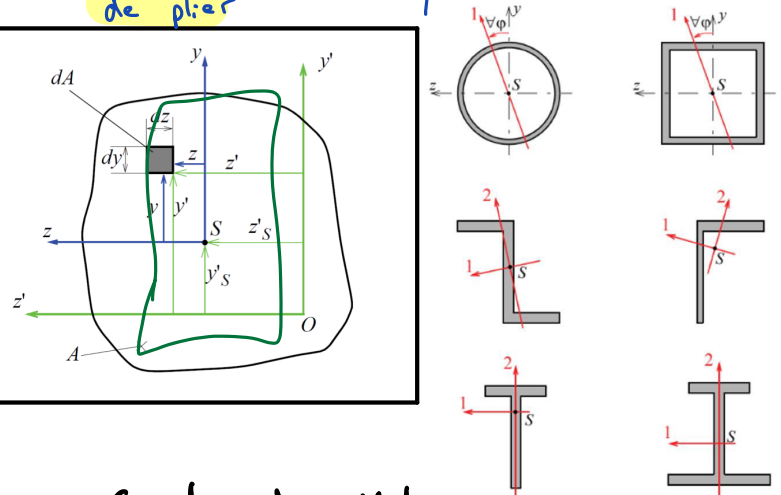
$$\varphi_1 = \arctan\left(\frac{I_{yz}}{I_z - I_1}\right)$$

① Les axes principaux passent par le centre de surface

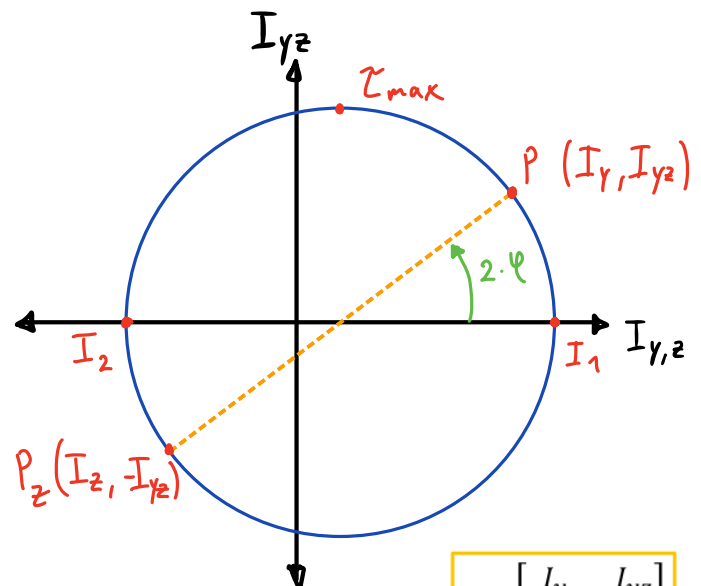
② $I_1 \perp I_2$ ③ $I_{12} = 0$ (I_{yz})

④ Axe de symétrie toujours un axe principale

⑤ Axe $I_1 \rightarrow$ autour duquel c'est le plus dur de plier



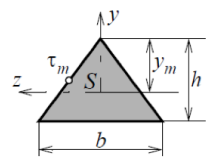
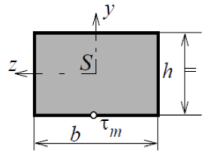
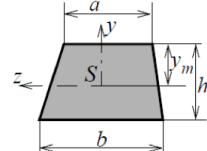
► Cercle de Mohr

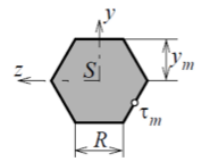
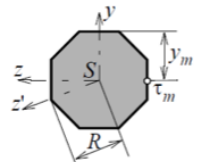
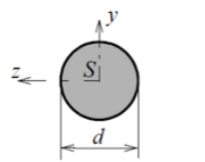


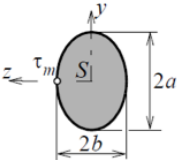
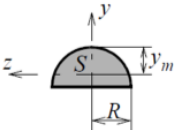
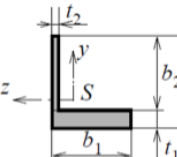
$$I = \begin{bmatrix} I_y & I_{yz} \\ I_{sym} & I_z \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ I_{sym} & I_2 \end{bmatrix}$$

Annexes

Section Querschnitt	Flexion / Biegung			Torsion		Remarque Bemerkung																														
	$y_m = y_{max}$	I_z	W_z	I_t	W_t																															
	$\frac{2h}{3}$	$\frac{b \cdot h^3}{36}$; $I_y = \frac{b^3 \cdot h}{48}$	$\frac{b \cdot h^2}{24}$ $W_y = \frac{b^2 \cdot h}{24}$	seul Δ équilatéral $\frac{b^4}{46.19} \approx \frac{h^4}{26}$	nur bei gleichseitig. Δ $\frac{b^3}{20} \approx \frac{h^3}{13}$	<table><tr><th>b/t</th><th>c_1</th><th>c_2</th></tr><tr><td>1</td><td>0.141</td><td>0.208</td></tr><tr><td>1.5</td><td>0.196</td><td>0.231</td></tr><tr><td>2</td><td>0.229</td><td>0.246</td></tr><tr><td>3</td><td>0.263</td><td>0.267</td></tr><tr><td>4</td><td>0.281</td><td>0.282</td></tr><tr><td>6</td><td>0.298</td><td>0.299</td></tr><tr><td>8</td><td>0.307</td><td>0.307</td></tr><tr><td>10</td><td>0.312</td><td>0.312</td></tr><tr><td>∞</td><td>0.333</td><td>0.333</td></tr></table>	b/t	c_1	c_2	1	0.141	0.208	1.5	0.196	0.231	2	0.229	0.246	3	0.263	0.267	4	0.281	0.282	6	0.298	0.299	8	0.307	0.307	10	0.312	0.312	∞	0.333	0.333
b/t	c_1	c_2																																		
1	0.141	0.208																																		
1.5	0.196	0.231																																		
2	0.229	0.246																																		
3	0.263	0.267																																		
4	0.281	0.282																																		
6	0.298	0.299																																		
8	0.307	0.307																																		
10	0.312	0.312																																		
∞	0.333	0.333																																		
	$\frac{h}{2}$	$\frac{b \cdot h^3}{12}$	$\frac{b \cdot h^2}{6}$	$c_1 \cdot b \cdot t^3$	$c_2 \cdot b \cdot t^2$																															
	$\frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}$	$\frac{h^3}{36} \cdot \frac{a^2+4ab+b^2}{a+b}$	$\frac{h^2}{12} \cdot \frac{a^2+4ab+b^2}{a+b}$																																	

Section Querschnitt	Flexion / Biegung			Torsion		Remarque Bemerkung
	$y_m = y_{max}$	I_z	W_z	I_t	W_t	
	$\frac{\sqrt{3} \cdot R}{2}$	$\frac{5\sqrt{3}}{16} \cdot R^4 = I_y$	$\frac{5}{8} \cdot R^3$ $W_y = \frac{5\sqrt{3}}{16} \cdot R^3$	$1.035 \cdot R^4$	$0.977 \cdot R^3$	
	$0.924R$	$0.638 \cdot R^4 = I_y$ $I_x = I_y = I_z$	$0.6906 \cdot R^3 = W_y$ $W_x = W_y = 0.638 \cdot R^3$	$1.26 \cdot R^4$	$1.17 \cdot R^3$	
	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi \cdot d^4}{64}$	$\frac{\pi \cdot d^3}{32}$	$\frac{\pi \cdot d^4}{32} = I_p$	$\frac{\pi \cdot d^3}{16} = W_p$	

Section Querschnitt	Flexion / Biegung			Torsion		Remarque Bemerkung														
	$y_m = y_{max}$	I_z	W_z	I_t	W_t															
	a	$\frac{\pi \cdot a^3 \cdot b}{4}$	$\frac{\pi \cdot a^2 \cdot b}{4}$	$\frac{\pi \cdot a^3 \cdot b^3}{a^2 + b^2}$	$\frac{\pi \cdot a \cdot b^2}{2}$															
	$\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) \cdot R$	$\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) \cdot R^4$	$0.1908 \cdot R^3$			<table><tr><td></td><td>η</td></tr><tr><td></td><td>0.99</td></tr><tr><td></td><td>1.12</td></tr><tr><td></td><td>1.12</td></tr><tr><td></td><td>1.31</td></tr><tr><td></td><td>1.29</td></tr><tr><td></td><td>1.17</td></tr></table>		η		0.99		1.12		1.12		1.31		1.29		1.17
	η																			
	0.99																			
	1.12																			
	1.12																			
	1.31																			
	1.29																			
	1.17																			
				$\frac{\eta}{3} \cdot \sum b_i t_i^3$	$\frac{\eta}{3} \cdot \frac{\sum b_i t_i^3}{t_{max}}$															

► Flexion pure

Hypothèses : $N(x), V_y(x), V_z(x), M_x(x), M_y(x) = 0$

Axe $z \rightarrow$ axe principal

Poutre prismatique

Matériau continu, homogène

Matériau linéaire-élastique

$\Rightarrow$ comportement traction/compr. élastique

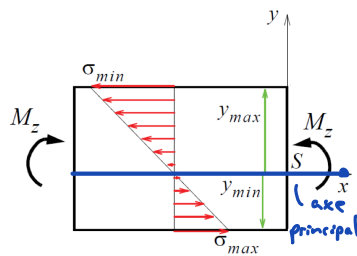
Section plane constante (Bernoulli)

► Moment résistant

$$W_y = \frac{I_y}{\max(|z_{\max}|, |z_{\min}|)}$$

$$W_z = \frac{I_z}{\max(|y_{\max}|, |y_{\min}|)}$$

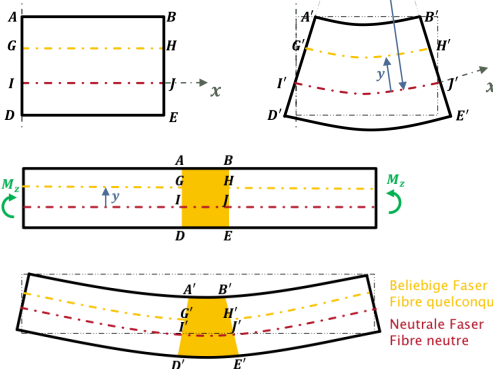
$$[A] = m^3$$



► Cinématique (fibre neutre)

⚠ Signe de y

$$\epsilon_x(y) = -\frac{y}{\rho}$$



La fibre neutre passe par le centre de gravité S

► Contraintes

⚠ axe y, z axes principaux $\Rightarrow I_{yz} = 0$

$$\sigma_x(y) = -\frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

contrainte traction ou compression

$$\sigma_x(y) = -\frac{E}{\rho} \cdot y$$

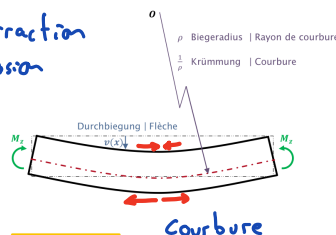
contrainte max

$$\sigma_b = -\frac{M_z}{I_z} \cdot \text{absmax}(y_{\max}, y_{\min})$$

$$\sigma_b = -\frac{E}{\rho} \cdot \text{absmax}(y_{\max}, y_{\min})$$

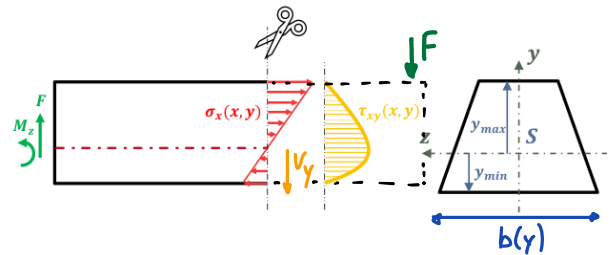
$$\sigma_b = \frac{|M_z|}{W_z}$$

$$v'' = \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E \cdot I_z}$$



► Flexion ordinaire ($L_{\text{poutre}} \gg \text{épaisseur}$)

σ_x dépend de x , forces de cisaillement



$$\sigma_x(x, y) = -\frac{M_z(x) \cdot y}{I_z}$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{V_y(x) \cdot S'_z(x, y)}{I_z(x) \cdot b(x, y)}$$

$V_y(x)$: effort tranchant

$I_z(x)$: moment quadratique

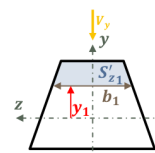
$S'_z(x, y)$: moment statique au dessus de y

$b(x, y)$: largeur section

Auswertung bei $y = y_1$
Évaluation si $y = y_1$

Auswertung bei $y = 0$
Évaluation si $y = 0$

Auswertung bei $y = y_{\min}$
Évaluation si $y = y_{\min}$

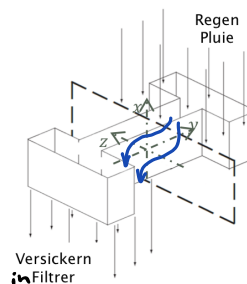


$$\tau_{xy}(y = y_1) = \frac{V_y \cdot S'_{z1}}{I_z \cdot b_1}$$

$$\tau_{xy}(y = 0) = \frac{V_y \cdot S'_{z2}}{I_z \cdot b_2}$$

$$\tau_{xy}(y = y_{\min}) = \frac{V_y \cdot S_z}{I_z \cdot b_3}$$

► Cisaillement - analogie de l'eau



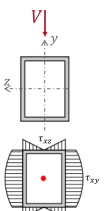
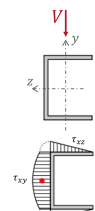
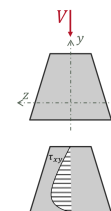
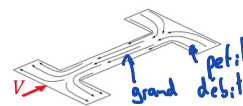
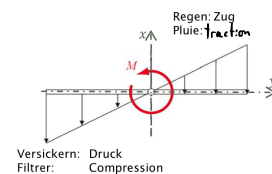
Le profil coupé est un réservoir

- Il pleut à $+y$
- L'eau s'infiltre à $-y$

$\rightarrow$ il y a un débit volumique $\dot{V}$

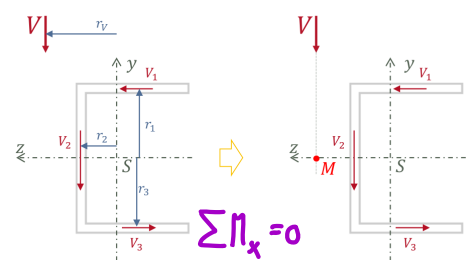
$$S: \dot{V} \perp A \approx \sigma_{xx}$$

$$\dot{V} \parallel A \approx \tau_{xy}$$



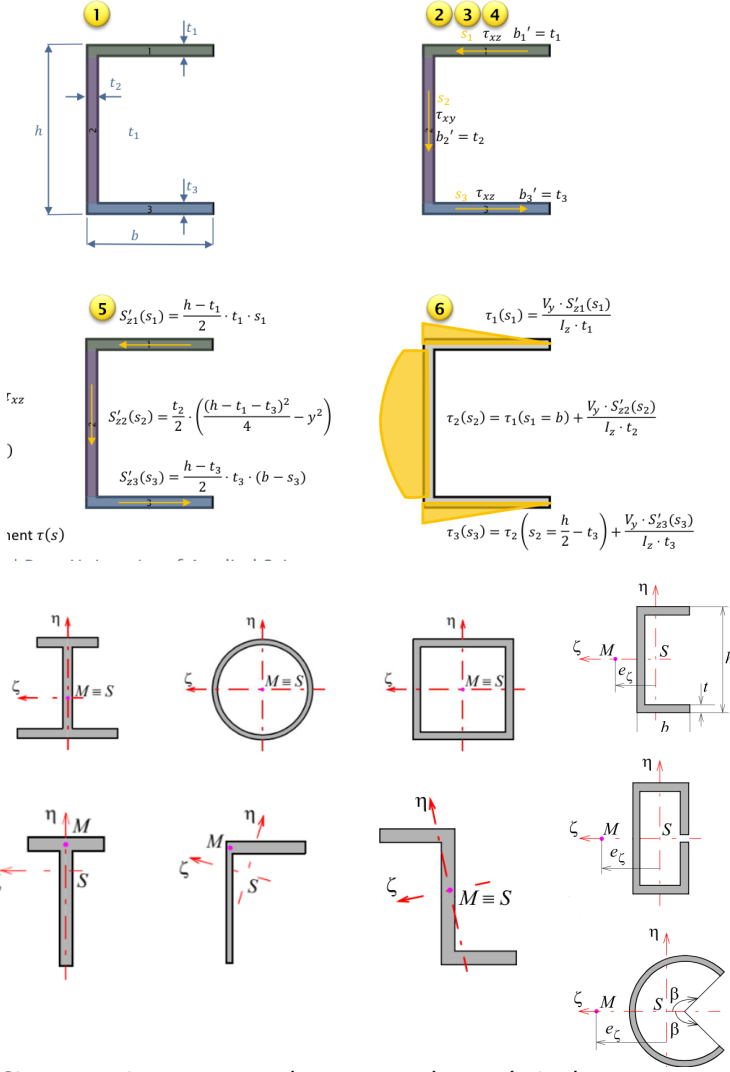
► Centre de cisaillement

La condition pour une flexion ordinaire est que la force transversale passe par le centre M



Procédure

1. Subdiviser le corps
2. Tracer le sens de la marche s
3. Tracer le sens de cisaillement $\tau_{xy} \vee \tau_{xz}$
4. Déterminer les épaisseurs $b'(s)$
5. Déterminer les moments d'aire $S'_z(s)$
 - a. $S'_z = y \cdot A'$ si τ_{xz}
 - b. $S'_z = \int y dA'$ si τ_{xy}
6. Déterminer la contrainte de cisaillement $\tau(s)$

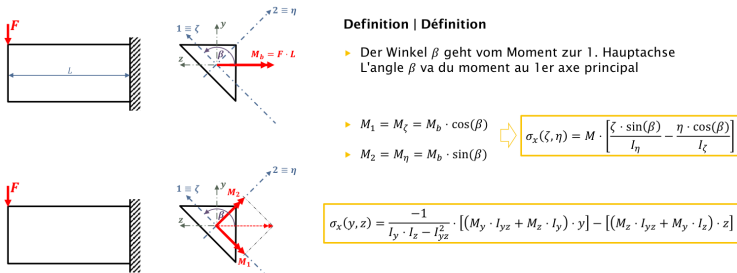


Si une section transversale a un axe de symétrie, le centre de cisaillement se trouve sur cet axe.

Si une section transversale a deux axes de symétrie, le centre de cisaillement se trouve à leur intersection, c'est-à-dire en S.

Pour les sections composées de deux (ou plus) rectangles, le centre de cisaillement se situe à l'intersection des lignes centrales des rectangles.

Flexion déviée



Ligne élastique

Krümmung | Courbure

$$v'' = \frac{M}{E \cdot I} \Rightarrow v''(x) \sim M_z(x) \quad v'' = \frac{1}{\rho}$$

Biegewinkel | Angle de flexion

$$v' = \int \frac{M}{E \cdot I} \cdot dx + C_1 \quad v' \approx \varphi \quad (v' = \tan \varphi)$$

Biegelinie | Ligne élastique

$$v = \int \left(\int \frac{M}{E \cdot I} dx \right) \cdot dx + C_1 \cdot x + C_2$$

FIG. 7-22 Déformée de flexion: ligne élastique et "pente"

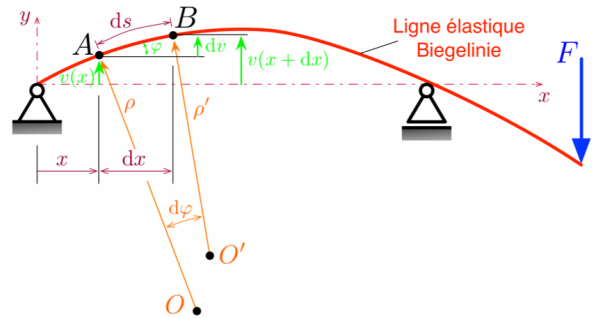
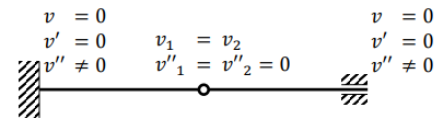


TABLE 7.1 Conditions aux limites typiques en flexion

Type d'appui		v	v'	$M \propto v''$	$V \propto v'''$
Palier articulé, palier libre ou fixe		$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$
Encastrement		$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
Extrémité libre		$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$



Energie de déformation flexion

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \frac{M_z^2}{E \cdot I_z} \cdot dx$$

Torsion

Angle de torsion :

$$\tau_{x\theta}(r) = \frac{M_x}{I_p} \cdot r$$

$$\varphi = \frac{M_x \cdot L}{G \cdot I_p}$$

$M_x, G, I_p = \text{const}$

Distinctions en fct. des sections

Gauchissement :



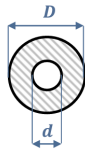
		wölbfrei sans gauchissement	verwölbend avec gauchissement
geschlossen fermé	voll plein	$I_t = I_p$	$I_t \neq I_p$
	hohl creuse		
offen ouvert			

Section pleine



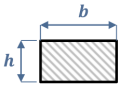
$$I_t = I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

$$W_t = W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$$



$$I_t = I_p = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32}$$

$$W_t = W_p = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{16 \cdot D}$$



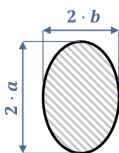
$$I_t = c_1 \cdot b \cdot h^3$$

$$W_t = c_2 \cdot b \cdot h^2$$



$$I_t = \frac{1.035}{16} \cdot D^4$$

$$W_t = \frac{0.977}{8} \cdot D^3$$



$$I_t = \frac{\pi \cdot a^3 \cdot b^3}{a^2 + b^2}$$

$$W_t = \frac{\pi \cdot a \cdot b^2}{2}$$

b/h	c ₁	c ₂
1.0	0.141	0.208
1.5	0.196	0.231
2.0	0.229	0.246
3.0	0.263	0.267
4.0	0.281	0.282
6.0	0.298	0.299
8.0	0.307	0.307
10.0	0.312	0.312
∞	0.333	0.333

Section creuse (paroi mince)

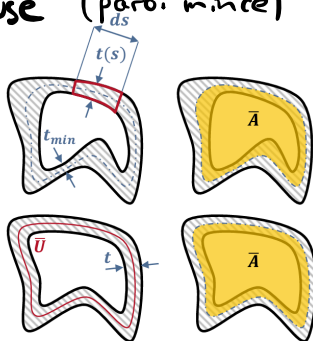
$$I_t = \frac{4 \cdot \bar{A}^2}{\oint \frac{1}{t(s)} \cdot ds} \quad | s \gg t$$

$$W_t = 2 \cdot \bar{A} \cdot t_{min}$$

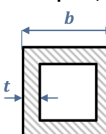
$$I_t = \frac{4 \cdot \bar{A}^2 \cdot t}{\bar{U}} \quad | s \gg t$$

$$| t(s) = t$$

$$W_t = 2 \cdot \bar{A} \cdot t$$



Beispiel | Exemple



$$\bar{U} = 4 \cdot (b - t)$$

$$\bar{A} = (b - t)^2$$

$$I_t = \frac{4 \cdot (b - t)^2 \cdot t}{4 \cdot (b - t)}$$

$$I_t = (b - t)^3 \cdot t$$

$$W_t = 2 \cdot (b - t)^2 \cdot t$$

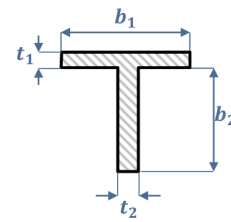
Section ouverte (paroi mince)

$$I_t = \frac{\eta}{3} \cdot \sum b_i \cdot t_i^3$$

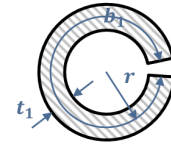
$$W_t = \frac{I_t}{t_{max}}$$

$$| b \gg t$$

Beispiele | Exemples



$$I_t = \frac{1.12}{3} \cdot (b_1 \cdot t_1^3 + b_2 \cdot t_2^3)$$

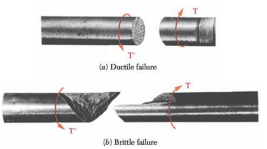
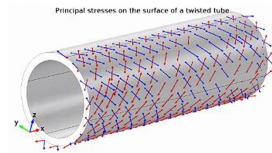
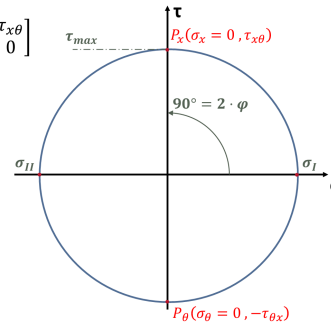


$$I_t = \frac{1.00}{3} \cdot b_1 \cdot t_1^3$$

$$I_t \approx \frac{1.00}{3} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot t_1^3$$

Hauptspannungen | Contraintes principale

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{x\theta} \\ \tau_{x\theta} & 0 \end{bmatrix}$$



Energie de deformation torsion

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \frac{M_x^2}{G \cdot I_t} \cdot dx$$

Principe justification FKN

$$\sigma_V = q \cdot \tau_t + (1 - q) \cdot \sqrt{3} \cdot \tau_t$$