

Fonctions

Injectivité

$$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$$

Méthode vérif:

$$\forall x_1, x_2 \in E$$

$$\text{si } f(x_1) = f(x_2)$$

$$\text{alors } x_1 = x_2 \Rightarrow \text{injectif}$$

Surjectivité

$$\forall b \in B, \exists a \in A : b = f(a)$$

Méthode vérif:

Prendre y quelconque
et résoudre
 $y = f(x)$

Bijectivité

Injectif et surjectif

Preuve: strict. monotone croissante

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } x_1 < x_2 \\ \text{alors } f(x_1) < f(x_2) \end{array} \right.$$

Garantir une propriété : limiter ensemble d'arrivée

Suites

Séries

Géométrique

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = \text{const}$$

$$S_n = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \begin{cases} a_n = n \\ S_n = \frac{n(n+1)}{2} \end{cases} \quad \text{Somme}$$

$$\Rightarrow S_n \rightarrow \infty$$

Arithmétique

$$\{a_n\} = \{a, a+b, a+2b, \dots\}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \begin{cases} a_n = c \\ S_n = c(n+1) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Somme} \\ \text{const} \end{array}$$

$$S_n \rightarrow 0 \text{ si } c = 0$$

$$S_n \rightarrow \pm \infty \text{ si } c \neq 0$$

Limites

Constante

Constante
multiplicative

Somme
différence

produit

quotient

racine

puissance

fonction
puissance

log

$$f(x) = C \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} k f(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (a^{f(x)}) = a^{\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\log_a f(x)) = \log_a \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)$$

Démontrer convergence suite méth.1

Théorème des deux gendarmes

$$\underbrace{b_n}_{\rightarrow C} \leq \underbrace{a_n}_{\rightarrow C} \leq \underbrace{c_n}_{\rightarrow C} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = C$$

Démontrer une limite

- Utiliser théorème gendarmes
- Utiliser les propriétés des limites

Démontrer convergence suite méth.2

Thm: suite monotone et bornée
 $\Rightarrow$ alors convergente

1. Si (a_n) croissant et majorée $\Rightarrow$ converge
2. Si (a_n) décroissant et minorée $\Rightarrow$ converge

Preuve: monotonicité

$$a_{n+1} - a_n > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

$$a_{n+1} - a_n < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$$

Idées:

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot n} \leq 2^{n-1}$$

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$\log_2 n \ll n^2 \ll 2^n \quad \ln n \ll n \quad (n \rightarrow \infty)$$

Limite d'une fonction

Si: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
alors $x_0 \cong$ point de discontinuité
non éliminable de $f(x)$
 $\Rightarrow$ extension continue de f dans x_0
non réalisable

Extension continue

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) = \dots, x \neq x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \dots, x = x_0 \end{cases}$$

Continuité fonction

$$f \text{ continue dans } x_0 \in \mathbb{D}_f \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Thm: $f(x)$ est continue $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

comme addition/sous./mult./quotient ou
Composition de deux fonctions continues

$$\frac{f}{g} \quad g(x_0) \neq 0$$

Asymptotes

$$a, b \in \mathbb{R}$$

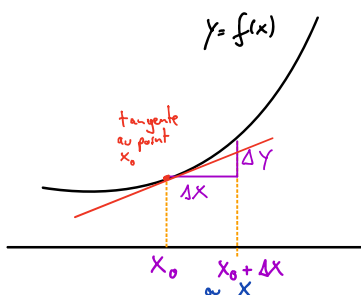
Verticale: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$

Horizontale: $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = b$

Oblique: $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = ax + b$

5. Calcul différentiel

Définition dérivée



$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Equation de la tangente

$$t(x) = mx + b$$

$$m = f'(x_0)$$

$$b = t(x_0) - m \cdot x_0$$

$$b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Propriétés des dérivées.

Produit
avec constante

$$(\lambda f(x))' = \lambda f'(x) \quad \lambda = \text{const.}$$

Somme

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Produit

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Quotient

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

puissance

$$(x^m)' = m x^{m-1}, \quad \forall m \in \mathbb{Q}$$

Racine

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

inverse

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Constante

$$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = c' = 0$$

Règle
chaîne

$$g(h(x)) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

fonction
puissance

$$(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \ln(f(x)) + g(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} \right)$$

Dérivabilité fonction dans $\mathbb{R}$

f différentiable au point x_0

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = f'(x_0)$$

$\Leftrightarrow f'$ est continue au point x_0

f dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ continue en x_0

f' continue en $x_0 \Leftrightarrow f$ dérivable en x_0

Notations dérivée

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{dy}{dx}(x_0)$$

Newton Leibniz

Dérivées des fonctions élémentaires

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{arccot}' x = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\cosh' x = \sinh x$$

$$\sinh' x = \cosh x$$

$$\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

$$\coth' x = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$$

$$\arg\cosh' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \arg\tanh' x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\arg\sinh' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \arg\coth' x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = \ln(a) a^x$$

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln(a)}$$

$$|x|' = \text{sgn}(x)$$

$x \neq 0$

$$\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{x}' = -\frac{1}{x^2}$$

Valeurs extrêmes fonction

Critère existence max/min

$x_0 \in (a, b)$ max/min local alors $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

min local s: $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$

max local s: $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$

n: max / n: min: $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) = 0$

Point inflexion

f continue dans x_0

$\Rightarrow$ point inflexion à $f''(x_0) = 0$

La fonction passe de concave à convexe

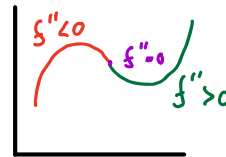
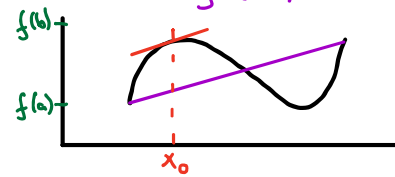
Thm moyenne (pente droite moyenne)

f continue sur (a, b)

f différentiable sur (a, b)

$\Rightarrow \exists x_0 \in (a, b)$ t.q.

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Variation d'une fonction

$f'(x) :$	$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$
$f''(x) :$	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$
f				
	$f \uparrow$ convexe	$f \uparrow$ concave	$f \downarrow$ convexe	$f \downarrow$ concave

FIGURE 5.20 – Sens de courbure et signes des dérivées

Limite indéfinie

Thm de l'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} = L$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} = L$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Discussion de courbe

1. Domaine déf.
2. Propriétés symétries? $\Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow$ sym. axiale
 $\Rightarrow -f(x) \Rightarrow$ sym. ponctuelle
3. Zéros de la fonction $f(x) = 0$
4. Asymptotes?
5. Singularité? fonction $\in \mathbb{D}_f$
6. Valeurs extrêmes min ou max?
7. Point d'inflexion
8. Graphe de la fonction

Problème d'optimisation : marche à suivre

1. Définir la grandeur qui doit être optimisée. En général, cette grandeur doit être une fonction f qui peut dépendre de plusieurs variables ou paramètres.
2. Déterminer les relations qui peuvent exister entre les différentes variables. Le but de cette opération est de pouvoir éliminer autant de variables que possible.
3. Calculer les valeurs extrêmes de la fonction f au moyen des méthodes des chapitres précédents.
4. Tester les solutions obtenues ci-dessus, et voir si celles-ci correspondent ou non au problème posé.

Intégrales

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{intégrande}} dx = \{F(x) + C \mid F'(x) = f(x), C \in \mathbb{R}\}$$

Intégrale de Riemann

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty, \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \underbrace{f(\xi_i)}_{\text{hauteur}} \underbrace{\Delta x_i}_{\text{base du rect.}}$$

Propriétés

Somme : $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

Constante : $\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx$

Changement de bornes : $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \quad (a < b < c)$

Inversion de bornes : $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

Majoration : $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Théorème fondamental (intégrale bornée)

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

L fonction primitive

Intégrale impropre (domaine infini)

$$\int_a^\infty \dots \leftrightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R \dots \quad \left| \quad \int_{-\infty}^b \dots \leftrightarrow \lim_{S \rightarrow -\infty} \int_S^b \dots \right| \quad \int_{-\infty}^\infty \dots \leftrightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^R \dots \leftrightarrow \lim_{S \rightarrow -\infty} \int_S^\infty \dots$$

Intégrale f avec singularité

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{b\} \rightarrow \int_a^c f(x) dx = \lim_{R \rightarrow b^-} \int_a^R f(x) dx + \lim_{S \rightarrow b^+} \int_S^c f(x) dx$$

Méthodes d'intégration

Par partie : $\int \underbrace{u' \cdot v}_{\text{compiqué}} dx = u \cdot v - \int \underbrace{u \cdot v'}_{\text{plus simple}} dx$

$$\int_a^b u' \cdot v dx = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b u v' dx$$

Par changement de variable : $\int_a^b g(f(x)) \cdot f'(x) dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(z) dz$

de variable $\left\{ \begin{array}{l} z = f(x) \\ z' = \frac{dz}{dx} \\ dx = \frac{dz}{f'(x)} \end{array} \right.$

il n'y a plus de "x"

Substitutions trigonométriques

L'intégrande contient :

$$\sqrt{a^2 - x^2}$$

↓

$$x = a \sin z$$

$$dx = a \cos z dz$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a |\cos z|$$

Δ considérer les bornes z

$$\sqrt{a^2 + x^2}$$

↓

$$x = a \sinh z$$

$$dx = a \cosh z dz$$

$$\sqrt{x^2 + a^2} = a \cosh z$$

$$\sqrt{x^2 - a^2}$$

↓

$$x = a \cosh z$$

$$dx = a \sinh z dz$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a |\sinh z|$$

Décomposition en fractions partielles

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad P, Q \text{ polynômes}$$

1. si : $\deg(P) > \deg(Q) \Rightarrow$ division poly. de P (Horner)

2. Factoriser Q(x) tel que produit de facteurs différents $(x+b)^a$ ou $(x^2+bx+c)^a$ irréductible

3. a) Décomposer pour chaque $(x+b)^a \quad a \geq 1$

Ex : $\frac{3x+7}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-3)}$

$$3x+7 = A(x-3) + B(x+1)$$

insérer $x=3$ et $x=-1$ pour trouver A et B $\in \mathbb{R}$

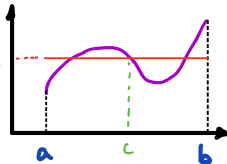
b Pour chaque facteur quadratique $(x^2+bx+c)^a$ irréductible

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + bx + c} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_a x + B_a}{(x^2 + bx + c)^a}$$

A_k et $B_k \in \mathbb{R}$ à trouver

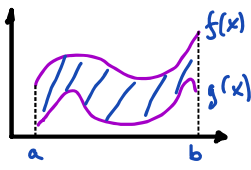
Applications géométriques

Théorème moyen:

$$M_a = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad f(c) = M_a$$


$$M_q = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x) dx}$$

Aire entre deux courbes:

$$A = A_f - A_g = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$


⚠ Il faut que $f(x) \geq g(x)$ dans $[a, b]$
 => sinon il faut sommer en plusieurs sections! $A = \sum A_k$

L'intégrale donne une aire signée!



Aire d'une surface

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad \text{si } f \geq 0$$

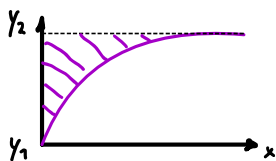
Centre de gravité surface:

$$x_G = \frac{1}{A} \int_a^b x f(x) dx$$

$$y_G = \frac{1}{2A} \int_a^b (f(x))^2 dx \quad \Delta \text{ pour } f \geq 0$$

Aire entre courbe et O_y

$$A_y = \int_{y_1}^{y_2} f^{-1}(y) dy$$



Longueur d'un arc

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Centre gravité de l'arc:

$$x_G = \frac{1}{L} \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$y_G = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Centre de masse d'un corps Ω

$$x_S = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} x dV \quad y_S = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} y dV \quad z_S = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} z dV$$

Corps de révolution - Volume

Aire latérale:

$$A_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Volume du corps

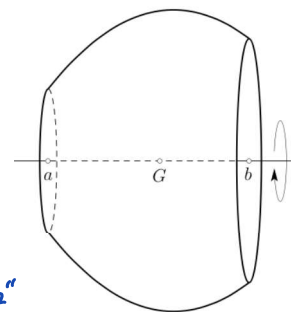
$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \quad " \sum \pi \cdot r^2 "$$

Centre de gravité révolution O_x

$$x_G = \frac{\pi}{V_x} \int_a^b x (f(x))^2 dx \quad y_G = z_G = 0$$

Volume d'un corps autour de O_y

$$V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} (f^{-1}(y))^2 dy$$



Règles de Guldin

Aire latérale de révolution du corps autour de O_x

2ème règle $A_x = 2\pi y_G L$ longueur du morceau de courbe générateur

1ère règle $V_x = 2\pi y_G A$ aire de la surface génératrice

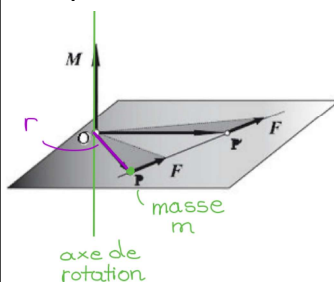
L d'après le script

$$\text{Autour de } O_y \quad A_y = 2\pi \cdot x_G \cdot L$$

$$\text{Volume du corps autour de } O_y \quad V_y = 2\pi \cdot x_G \cdot A$$

Les formules fonctionnent pour une révolution autour d'un axe quelconque vertical/horizontal

Représentation avec moment de force



Hypothèse: masse m de Ω est concentrée dans son centre de gravité S, avec une distance r_S de l'origine O.

$$M = r_S \cdot m = \int_{\Omega} r dm$$

donc:

$$r_S = \frac{1}{m} \int_{\Omega} r dm$$

position du centre de gravité d'un corps Ω de masse m, donnée comme distance entre S et l'axe de rotation

Primitives de fonctions

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
a	ax	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} = \frac{x^{-n+1}}{-n+1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\frac{1}{(x-a)(x-b)}$	$\frac{1}{a-b} \ln \left \frac{x-a}{x-b} \right $	$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \ln cx+d $
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$	$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right $
e^x	e^x	$\ln(x)$	$x(\ln(x) - 1)$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$\log_a(x)$	$x(\log_a(x) - \log_a(e))$
xe^{ax}	$\frac{1}{a^2}(ax-1)e^{ax}$	$x \ln(ax)$	$\frac{x^2}{4}(2 \ln(ax) - 1)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\arcsin(x)$	$x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\arccos(x)$	$x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) $	$\arctan(x)$	$x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
$\cot(x)$	$\ln \sin(x) $	$\operatorname{arccot}(x)$	$x \operatorname{arccot}(x) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
$\sin^2(x)$	$\frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$	$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x)$
$\cos^2(x)$	$\frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\tan^2(x)$	$\tan(x) - x$	$\frac{1}{\sin(x)}$	$\ln \left \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} \right $
$\cot^2(x)$	$-\cot(x) - x$	$\frac{1}{\cos(x)}$	$\ln \left \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)} \right $
$\frac{1}{1+\sin(x)}$	$\frac{-\cos(x)}{1+\sin(x)}$	$\frac{1}{1-\sin(x)}$	$\frac{\cos(x)}{1-\sin(x)}$
$\frac{1}{1+\cos(x)}$	$\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$	$\frac{1}{1-\cos(x)}$	$\frac{-\sin(x)}{1-\cos(x)}$
$x \sin(ax)$	$-\frac{1}{a}x \cos(ax) + \frac{1}{a^2} \sin(ax)$	$x \cos(ax)$	$\frac{1}{a}x \sin(ax) + \frac{1}{a^2} \cos(ax)$
$e^{ax} \sin(bx)$	$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \sin(bx) - b \cos(bx))$	$e^{ax} \cos(bx)$	$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos(bx) + b \sin(bx))$

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$	$x \operatorname{arsinh}(x) - \sqrt{x^2+1}$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$	$x \operatorname{arcosh}(x) - \sqrt{x^2-1}$
$\tanh(x)$	$\ln(\cosh(x))$	$\operatorname{artanh}(x)$	$x \operatorname{artanh}(x) + \frac{1}{2} \ln(1-x^2)$
$\coth(x)$	$\ln \sinh(x) $	$\operatorname{arcoth}(x)$	$x \operatorname{arcoth}(x) + \frac{1}{2} \ln(x^2-1)$
$\sqrt{x^2+a}$	$\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2} \ln x+\sqrt{x^2+a} $	$\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$	$\ln x+\sqrt{x^2+a} $
$\sqrt{r^2-x^2}$	$\frac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}$	$\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)$

	Sin	Cos	tan	cot
Domaine déf.:	$]-\infty, \infty[$	$]-\infty, \infty[$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ $k \in \mathbb{Z}$	$]0, \pi[+ k \cdot \pi$ $k \in \mathbb{Z}$
D.inversibilité:	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[0, \pi]$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$	$]0, \pi[$
Ensemble image:	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$]-\infty, \infty[$	$]-\infty, \infty[$

	arcsin	arccos	arctan	arccot
Domaine déf.:	$[-1, +1]$	$[-1, +1]$	$]-\infty, \infty[$	$]-\infty, \infty[$
D.inversibilité:	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[0, \pi]$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$	$]0, \pi[$
Ensemble image:	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[0, \pi]$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$	$]0, \pi[$

Relations entre fonctions trigonométriques d'un même arc

$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$	$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	$\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$
$\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$	$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$	$\frac{1}{\sin^2(\alpha)} = 1 + \cot^2(\alpha)$

Relations entre fonctions trigonométriques de certains arcs

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot(\alpha)$

Fonctions trigonométriques d'une somme et d'une différence d'arcs

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$	$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$	$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$	$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$

Transformation d'une somme en produit

$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$	$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$
$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$	$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$
$\tan(\alpha) + \tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$	$\tan(\alpha) - \tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$
$a\cos(\alpha) + b\sin(\alpha) = A\cos(\alpha - \varphi)$ avec $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ et φ tel que $\cos(\varphi) = \frac{a}{A}$ et $\sin(\varphi) = \frac{b}{A}$	

Fonctions trigonométriques du double et du triple d'un arc

$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$	
$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$	$\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$
$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$	$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$
$\cos(3\alpha) = \cos(\alpha)(1 - 4\sin^2(\alpha)) = \cos(\alpha)(4\cos^2(\alpha) - 3)$	
$\sin(3\alpha) = \sin(\alpha)(4\cos^2(\alpha) - 1) = \sin(\alpha)(3 - 4\sin^2(\alpha))$	
$\tan(3\alpha) = \frac{\tan(\alpha)(3 - \tan^2(\alpha))}{1 - 3\tan^2(\alpha)}$	

Fonctions trigonométriques de la moitié d'un arc

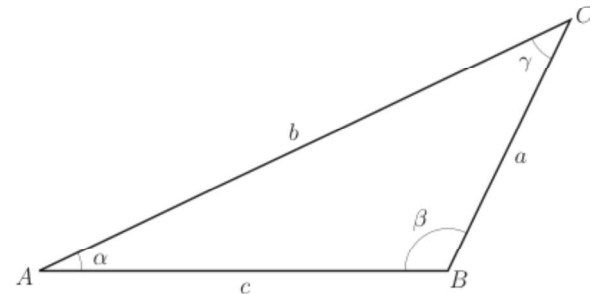
$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos(\alpha)}{2}$	$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2}$
$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$	$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$

Fonctions trigonométriques exprimées à l'aide de $t = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$\cos(\alpha) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$	$\sin(\alpha) = \frac{2t}{1 + t^2}$	$\tan(\alpha) = \frac{2t}{1 - t^2}$
--	-------------------------------------	-------------------------------------

α		$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
0°	0	1	0	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	0	1	-

Triangle quelconque



Théorème du cosinus

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \end{aligned}$$

Deg / rad / grade

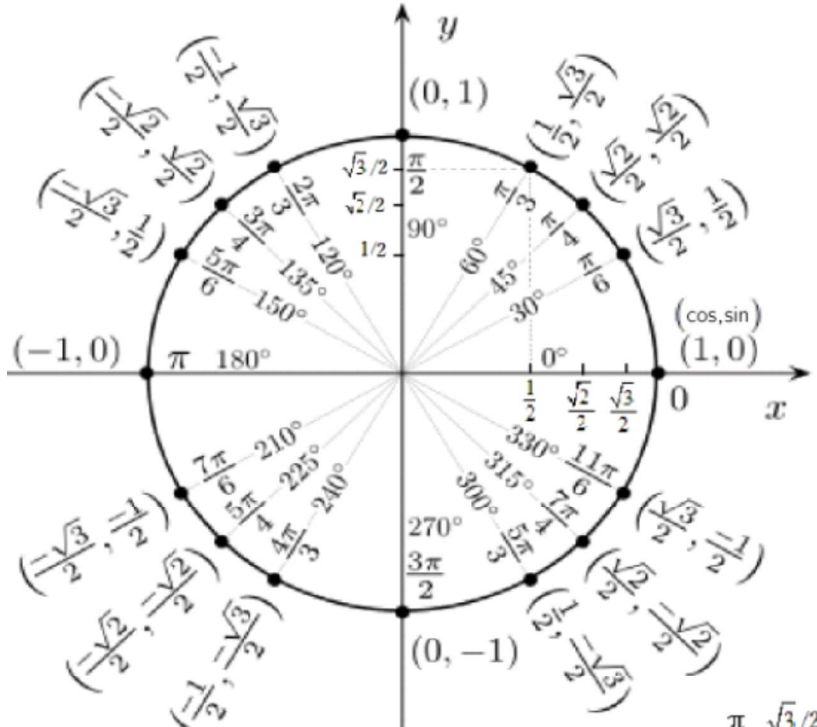
$$\frac{d}{180} = \frac{r}{\pi} = \frac{g}{200}$$

Théorème du sinus

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Transformation d'un produit en somme

$$\begin{aligned} \cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \\ \cos(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}(-\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{aligned}$$



$$\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$$

Equation d'un cercle

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

avec $C(x_0, y_0)$ et $\|\vec{CP}\| = r$
 $P(x, y)$

Equation de la sphere

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$$

Fonctions hyperboliques

$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$\coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)}$
-------------------------------------	-------------------------------------	--	---------------------------------

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$	$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$	$\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$
-------------------------------	--	---

$\sinh(-x) = -\sinh(x)$	$\cosh(-x) = \cosh(x)$	$\tanh(-x) = -\tanh(x)$
-------------------------	------------------------	-------------------------

$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$ $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$ $\tanh(x+y) = \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)}$	$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$ $\cosh(2x) = \sinh^2(x) + \cosh^2(x)$ $\tanh(2x) = \frac{2\tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)}$
---	--

$\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh(x) - 1}{2}$	$\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh(x) + 1}{2}$	$\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh(x) - 1}{\sinh(x)} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x) + 1}$
--	--	---

Formule de Moivre	$(\cosh(x) + \sinh(x))^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$
-------------------	---

$$\ast \cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x) + 1}{2}$$

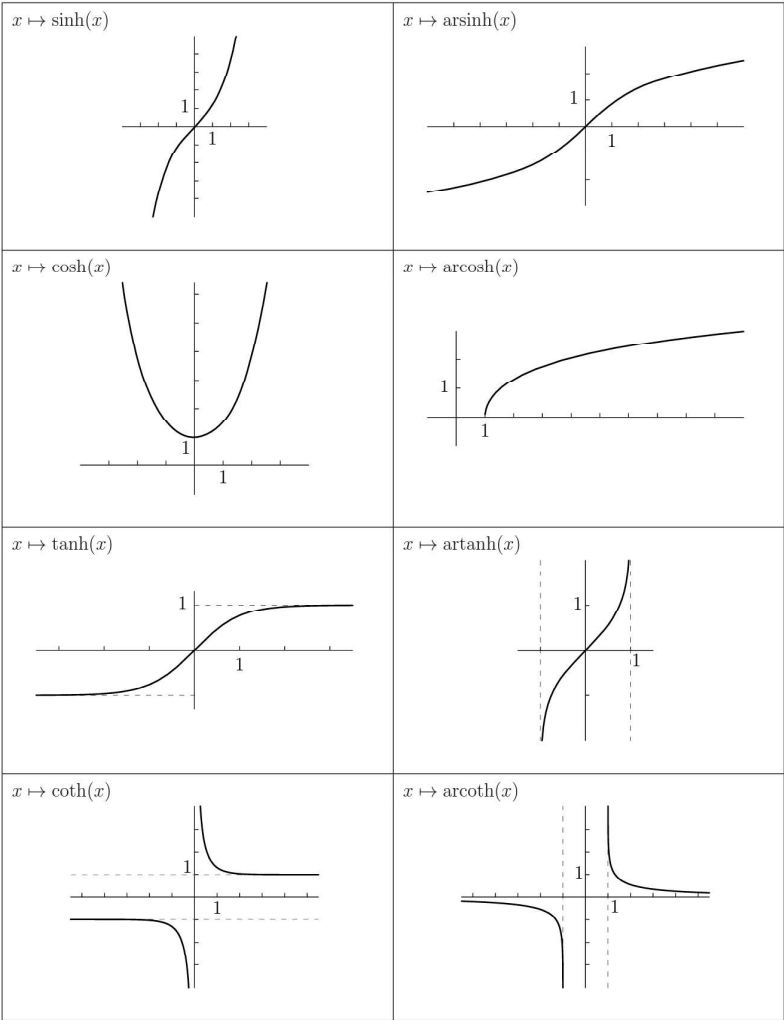
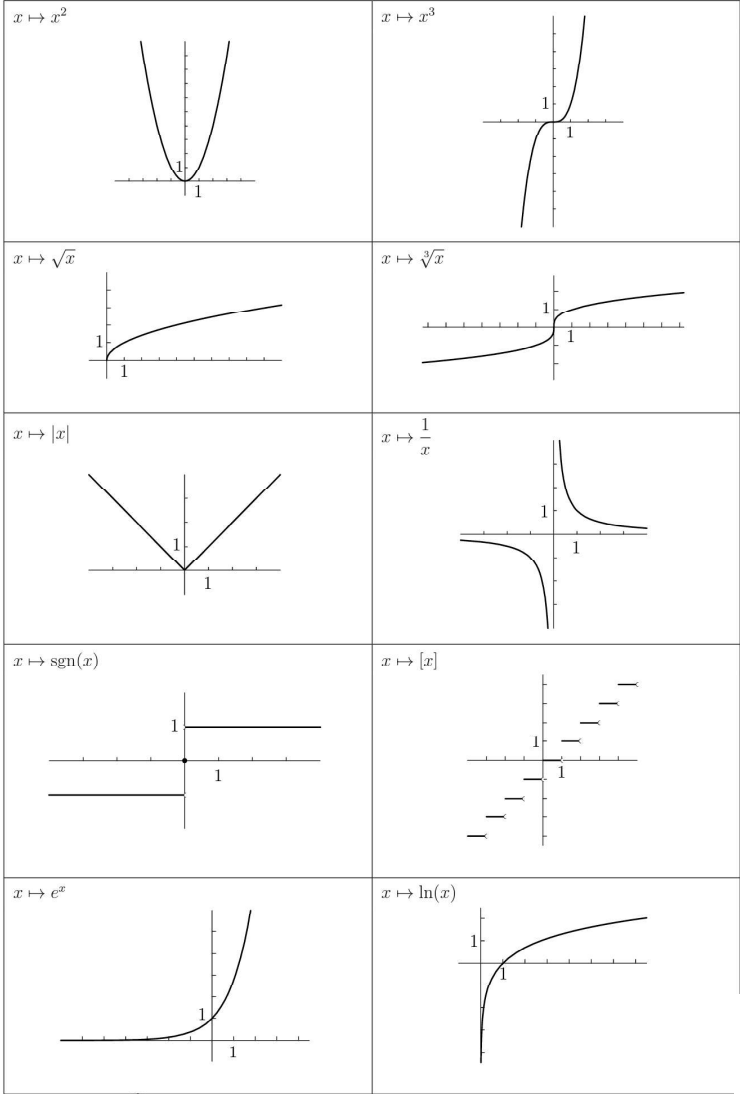
$$\sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x) - 1}{2}$$

Fonction réciproque des fonctions hyperboliques

$x \in \mathbb{R}$	$\operatorname{arsinh}(x) = y \Leftrightarrow x = \sinh(y)$	$y \in \mathbb{R}$
$x \geq 1$	$\operatorname{arcosh}(x) = y \Leftrightarrow x = \cosh(y)$	$y \geq 0$
$-1 < x < 1$	$\operatorname{artanh}(x) = y \Leftrightarrow x = \tanh(y)$	$y \in \mathbb{R}$
$x < -1$ ou $x > 1$	$\operatorname{arcoth}(x) = y \Leftrightarrow x = \coth(y)$	$y \neq 0$

$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$\operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

Représentation graphique de quelques fonctions



Quelques limites

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$ si $a > 1$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ si $a > 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$ si $0 < a < 1$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
--	--	--	--

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$	
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln(a)}$	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^b(x)}{x^a} = 0$
$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^a \ln(x) = 0$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^a \ln^b(x) = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{ax}} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0$

