

Fonctions de plusieurs variables

$$f: \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Fixer une variable

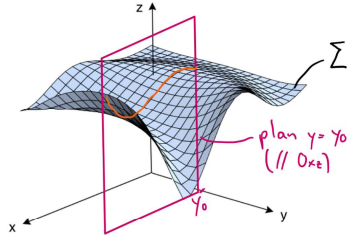
Donné: $z = f(x, y)$

Fixer $y \Rightarrow y = y_0 = \text{const}$

$$z = f(x, y_0) \hat{=} h(x)$$

Fixer $x \Rightarrow x = x_0 = \text{const}$

$$z = f(x_0, y) \hat{=} g(y)$$



$\rightarrow h(x), g(y) \rightarrow$ courbe coordonnées

Fixer $z \Rightarrow z = z_0 = \text{const}$

$$z_0 = f(x, y) \Rightarrow \text{vue aérienne des courbes de niveau}$$

Dérivées partielles

Valeur limite: $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L$

Vérifier continuité: a) $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ existe

b) Définitions: $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

$$\partial_x f(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \tan \alpha_1$$

$$\partial_y f(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \tan \alpha_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ ou } \partial_x f(x, y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \text{ ou } \partial_y f(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \partial_{xx} f(x, y) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \partial_{yy} f(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \partial_{yx} f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \partial_{xy} f(x, y)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y}$$

Différentielle totale

$\rightarrow$ approximation de variation de f

Valeur exacte: $\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$

Approximation: $df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy \dots$

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy) \approx f(x_0, y_0) + df$$

Erreur d'approx: $df - \Delta f$

Dérivées de fonctions implicites

Forme implicite: $F(x, y) = \underline{0}$

$$y'|_{P_0} = \frac{dy}{dx} \Big|_{P_0} = - \frac{\partial_x F}{\partial_y F} \Big|_{P_0}$$

évaluer au point P_0

Valeurs extrêmes

Critère 1:

$$\begin{cases} \partial_x f = 0 \\ \partial_y f = 0 \end{cases}$$

Critère 2:

$$\det \begin{pmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{xy} f \\ \partial_{yx} f & \partial_{yy} f \end{pmatrix} =: \det(H)$$

$$= \partial_{xx} f \cdot \partial_{yy} f - \partial_{xy} f \cdot \partial_{yx} f$$

$$= \partial_{xx} f \cdot \partial_{yy} f - (\partial_{xy} f)^2 > 0$$

si: $\det H < 0 \Rightarrow$ point inflexion
 $\det H = 0 \Rightarrow$ aucune info

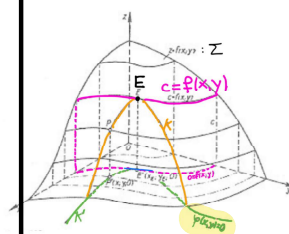
Max	Min
$\downarrow$	$\downarrow$
$\partial_{xx} f < 0$ ou $\partial_{yy} f < 0$	$\partial_{xx} f > 0$ ou $\partial_{yy} f > 0$

Multiplicateurs de Lagrange

But: trouver valeur extrême de f par rapport à la condition supplémentaire

$$\max/\min \{ z = f(x, y) \mid \varphi(x, y) = 0 \}$$

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$$



$$\begin{cases} \partial_x L = \partial_x f(x, y) + \lambda \partial_x \varphi(x, y) = 0 & \text{I} \\ \partial_y L = \partial_y f(x, y) + \lambda \partial_y \varphi(x, y) = 0 & \text{II} \\ \partial_\lambda L = \varphi(x, y) = 0 & \text{III} \end{cases}$$

But: éliminer λ qui est inutile
 $\Rightarrow$ faire I-II ou I+II

courbe K' sous forme implicite

Formule de Taylor

→ Approximer $f(x_0+h)$ avec ses dérivées

$$\begin{array}{ll} 0! = 1 & 3! = 6 \\ 1! = 1 & 4! = 24 \\ 2! = 2 & 5! = 120 \end{array}$$

Développement de Taylor d'ordre n au point x_0 de f

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k$$

↪ avec $h = x - x_0$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n(x_0)$$

Reste de Lagrange pour f à une variable:

$$R_n(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!} h^{n+1} \quad \theta \in (0, 1).$$

Polynôme de MacLaurin ($x_0 = 0$)

$$P_n(h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot (h)^k$$

Formule Taylor à plusieurs variables

$$f(x_0 + h, y_0 + k) =$$

$$f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} k +$$

$$\frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} h^2 + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} h k + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} k^2 \right) + \dots + R_n.$$

pos défini
trop complexe
(très petit)
?

Paramétrisation d'une courbe

Cartésien:

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot i + y(t) \cdot j + z(t) \cdot k$$

Vectoriel:

$$\Gamma: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, t \in [a, b]$$

⚠ Une courbe peut être paramétrisée de différentes manières ⇒ choisir la plus simple

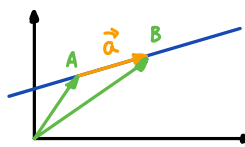
Paramétriser une courbe:

1. Choisir un paramètre (en général t comme temps)
2. Choisir des fonctions paramétriques qui décrivent la courbe en fonction de t

3 fonctions → espace, 2 fonctions → plan, 1 fonction → droite

3. Préciser l'intervalle que t doit parcourir

Une droite

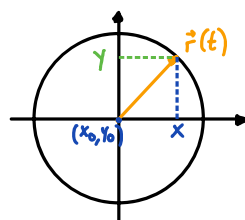


$$\Gamma: \vec{r}(t) = \vec{r}_A + t \cdot \vec{a}, t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_A + t(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_A + t(x_B - x_A) \\ y_A + t(y_B - y_A) \\ z_A + t(z_B - z_A) \end{pmatrix}$$

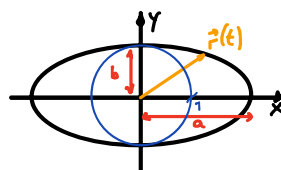
Cercle



$$\Gamma: \vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi[$$

$$\Gamma: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + R \cos t \\ y_0 + R \sin t \end{pmatrix}$$

Ellipse



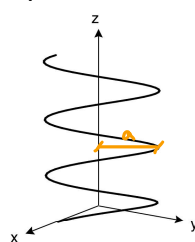
$$\left(\frac{x - x_0}{a} \right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b} \right)^2 = 1$$

$$\Gamma: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + a \cos t \\ y_0 + b \sin t \end{pmatrix} \text{ avec coord. du centre}$$

Hélice

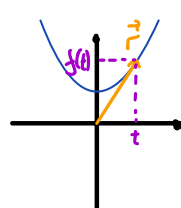


$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos(bt) \\ a \sin(bt) \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

"fréquence" b
"amplitude verticale" c

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} -ab \sin(bt) \\ ab \cos(bt) \\ c \end{pmatrix}$$

Fonction



$$\Gamma: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Relation direct entre x et y !

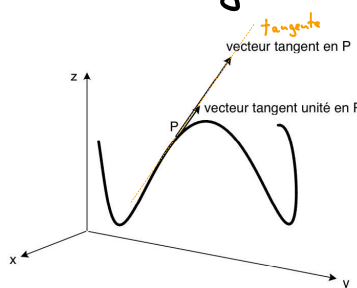
Vecteur tangent

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

$$= x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k$$

Vecteur tangent unité

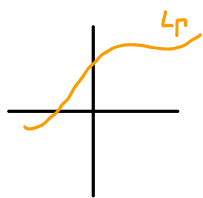
$$\vec{U}(t) = \frac{1}{\|\vec{r}'(t)\|} \cdot \vec{r}'(t)$$



$$\text{Vecteur vitesse: } \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

(dérivé par rapport au temps)

Longueur d'une courbe



$$L_r = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

Longueur courbe plane polaire:

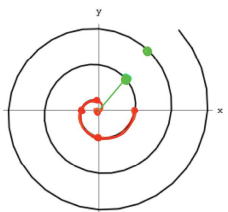
"distance", "hypothénuse"

$$L = \int_a^b \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi \text{ avec } \Gamma: \rho = \hat{\rho}(\varphi)$$

$$\Gamma: \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} \rho(\varphi) \cdot \cos \varphi \\ \rho(\varphi) \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$= \int_a^b \|\vec{r}'(\varphi)\| d\varphi \quad \varphi \in [\alpha, \beta]$$

Spirale archimède



$$\rho(\varphi) = \frac{1}{2} \varphi$$

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \varphi \cdot \cos \varphi \\ \frac{1}{2} \varphi \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Longueur d'arc

⇒ Longueur de courbe en fonction de t

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2 + z'(\tau)^2} d\tau$$

τ variable d'intégration choisie ($t \neq \tau$)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

→ élément de longueur d'arc de la courbe

$$\frac{d}{ds} s = \|\vec{r}'(s)\| = \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2 + z'(s)^2}$$

"norme du vecteur tangent à la courbe paramétrisée par la longueur d'arc = 1" ⇒ **vecteur unité**

Paramétrisation naturelle

⇒ paramétriser avec la longueur d'arc

$$\Gamma: \vec{r}(s) \quad (\|\vec{r}'(s)\| = \|\vec{v}(s)\| = 1)$$

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2 + z'(\tau)^2} d\tau = \dots \cdot t \xrightarrow{\text{remplacer}} \vec{r}(t)$$

trouver $t = \dots \cdot s$

Courbure "accélération de courbe"

La courbe Γ est param. par sa longueur d'arc:

$$\kappa \triangleq \text{déviation locale d'une courbe par rapport à la direction de la tangente}$$

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d\vec{v}(s)}{ds} \right\| = \left\| \frac{d^2 \vec{r}(s)}{ds^2} \right\|$$



La courbure est **signée**!

$$\vec{r}'(s) = \vec{v}(s)$$

$$\vec{r}''(s) = \vec{v}'(s)$$

Paramétrisé par t : $\left\{ \begin{aligned} \vec{r}(t) &= \frac{\ddot{y} \dot{x} - \dot{y} \ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \end{aligned} \right.$

(cas général)

Param. par fonction: $\left\{ \begin{aligned} \vec{r}(x) &= \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \end{aligned} \right.$

$$\Gamma: y = f(x)$$

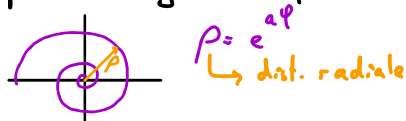
$$\left[\Gamma: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} \right]$$

Paramétrisation polaire: $\left\{ \begin{aligned} \vec{r}(\varphi) &= \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}} \end{aligned} \right.$

$$\Gamma: \rho = \rho(\varphi)$$

Courbure d'un cercle: $\kappa(s) = \frac{1}{R} \Rightarrow \text{constant.}$

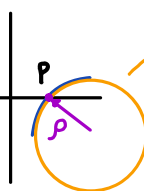
Spirale logarithmique



$$\rho = e^{a\varphi}$$

→ dist. radiale

Cercle de courbure



cercle de courbure de Γ au point P

$\rho \triangleq$ rayon de courbure

$$\rho = \left| \frac{1}{\kappa(s)} \right| \sim \text{valeur absolue}$$

Intégrale curviligne

⇒ Travail d'un champ de force $\vec{F}$ le long d'un chemin Γ

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{r}' dt = \int_a^b \underbrace{\vec{F}(x(t), y(t), z(t))}_{\text{restriction de } \vec{F} \text{ sur } \Gamma} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}}_{\text{produit scalaire}} dt$$

remplacer x, y, z par $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

Gradient

⇒ Est-ce que l'intégrale curviligne est dépendant du chemin parcouru ?

$\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ fonction différentiable (champ scalaire)
 $(x, y, z) \mapsto \phi(x, y, z)$

gradient de ϕ :
 $\uparrow$
 $\text{grad } \phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} \phi(x, y, z) \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} \phi(x, y, z) \end{pmatrix}$ "nabla" = grad

The gradient vector can be interpreted as the "direction and rate of fastest increase"

Intégrale curviligne indépendante du chemin $\Gamma \left(\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right)$

s: $\vec{F}(x, y, z)$ est un champ vectoriel potentiel

↳ il existe un champ scalaire ϕ (champ potentiel de $\vec{F}$)
tel que $\vec{F} = \nabla \phi$ ⇒ il faut trouver ϕ

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1. trouver "primitives"

$$\vec{F} = \nabla \phi \Rightarrow \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \phi \\ \frac{\partial}{\partial y} \phi \\ \frac{\partial}{\partial z} \phi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \phi(x, y, z) &= x^2 y + C(y, z) \\ \phi(x, y, z) &= x^2 y + C(x, z) \\ \phi(x, y, z) &= -2z + C(x, y) \end{aligned}$$

2. Evaluer les constantes

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow C(x, y) &= x^2 y \\ C(x, z) &= C(y, z) = -2z \end{aligned} \right\} \phi(x, y, z) = x^2 y - 2z + C$$

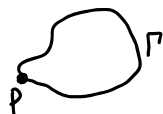
Théorème

$\vec{F}$ champ potentiel (conservatif) avec le potentiel ϕ

Γ chemin quelconque entre un point A jusqu'à B

$$\Rightarrow \int_{\Gamma} \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B \nabla \phi d\vec{r} = \boxed{\phi(B) - \phi(A)}$$

Cas particulier: Γ courbe fermée



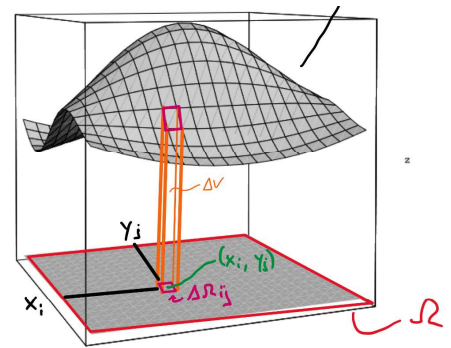
$$\Rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{F} d\vec{r} = \phi(P) - \phi(P) = 0$$

Intégrales doubles

=> calculer un volume au dessus d'un domaine Ω

$$V = \iint_{\Omega} f(x,y) d\Omega = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} f(x,y) dy dx = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^M f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j \right)$$

$$V = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left[\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} f(x,y) dy \right] dx = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left[\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x,y) dx \right] dy \quad \text{avec domaine } \Omega \text{ rectangulaire!}$$



Volume d'un corps dans un domaine Ω défini par inéquation

$$\Omega: \{(x,y) \mid y_{\min}(x) \leq y \leq y_{\max}(x), x_{\min} \leq x \leq x_{\max}\}$$

$$V = \iint_{\Omega} f(x,y) d\Omega = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy \right] dx$$

Adaptation des bornes $\Downarrow$ passer de $y(x)$ à $x(y)$ => $y(x)$ bijective!
=> $x(y) = f^{-1}(y)$

$$= \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y) dx \right] dy$$

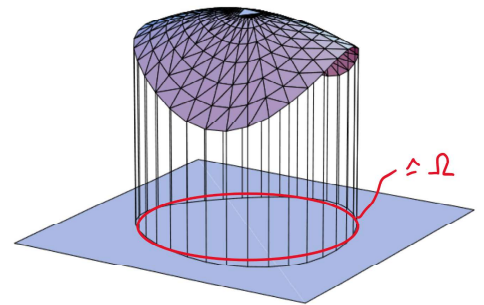


FIGURE 8.11 – Volume d'un corps entre le plan Oxy et le graphe d'une fonction.

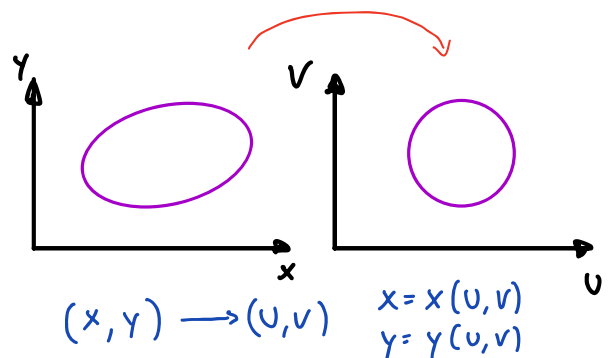
Changement de variable

=> Changer système de coordonnées = plus facile!

$$z = f(x,y), \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy = \iint_{\bar{\Omega}} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot \underbrace{|\mathcal{J}(u,v)|}_{\text{Jacobien de la transformation}} du dv$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$



En coordonnées polaires

But: simplifier calcul volume formes arrondies, cercles, tores

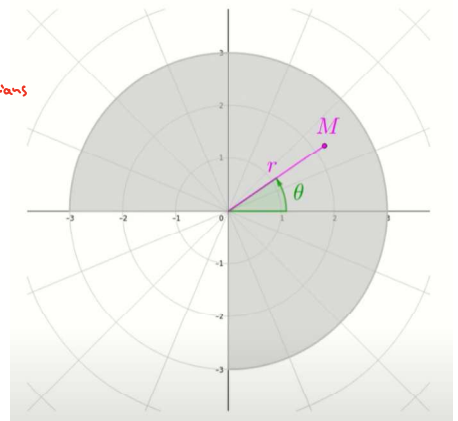
$$\iint_{\Omega} f(x,y) d\Omega = \iint_{\bar{\Omega}} f(x(R,\varphi), y(R,\varphi)) \cdot R dR d\varphi$$

$$\mathcal{J}(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -R \sin \varphi \\ \sin \varphi & R \cos \varphi \end{vmatrix} = R \neq 0$$

$$\begin{aligned} x(R,\varphi) &= R \cos \varphi \\ y(R,\varphi) &= R \sin \varphi \\ R &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$\bar{\Omega} = \{ R_{\min} \leq R \leq R_{\max}, \varphi_{\min} \leq \varphi \leq \varphi_{\max} \}$$

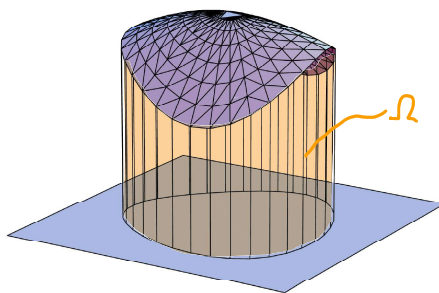
Souvent $\Rightarrow \downarrow 0$ $\downarrow 0$ $\downarrow 2\pi$



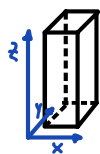
Intégrales triples $\Rightarrow$ calculer le volume, la masse, un moment, centroïde d'un corps Ω

Ω : domaine d'intégration dans $\mathbb{R}^3$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dV \quad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$$

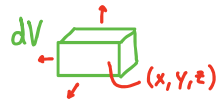


1^{er} cas: $\Omega \triangleq$ parallépipède



Ω : $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$
 $y_{\min} \leq y \leq y_{\max}$
 $z_{\min} \leq z \leq z_{\max}$

volume: $V = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} 1 \, dz \, dy \, dx$



masse du parallépipède:

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} f(x,y,z) \, dz \, dy \, dx$$

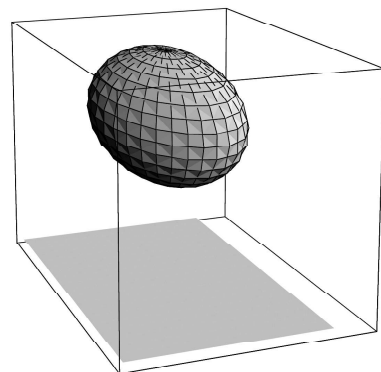
$\hookrightarrow$ fonction de la densité de masse etc...

2^{ème} cas: corps quelconque

Ω : $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$
 $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$
 $z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y)$

volume: $V = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} 1 \, dz \, dy \, dx$

masse... : $\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) \, dz \, dy \, dx$



Changement de variable

$(x,y,z) \rightarrow (u,v,w)$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dV = \iiint_{\tilde{\Omega}} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot |J(u,v,w)| \, du \, dv \, dw$$

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$$

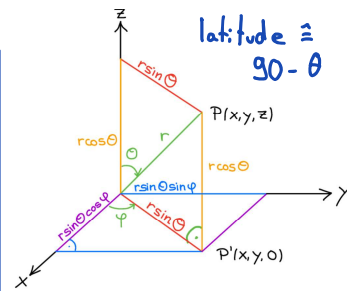
Coordonnées sphériques $(x,y,z) \rightarrow (r,\theta,\varphi)$

$\tilde{\Omega}$: $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$, $\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dV = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} f(x(r,\theta,\varphi), y(r,\theta,\varphi), z(r,\theta,\varphi)) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$\leftarrow$ on peut changer l'ordre d'intégration! Δ colatitude

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cdot \cos \theta \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \\ \theta &= \arctan \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{z^2}} \end{aligned}$$



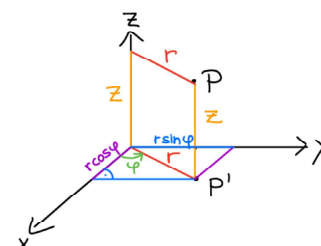
Coordonnées cylindrique $(x,y,z) \rightarrow (r,\varphi,z)$

$\tilde{\Omega}$: $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $z_{\min} \leq z \leq z_{\max}$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dV = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f(x(r,\varphi,z), y(r,\varphi,z), z(r,\varphi,z)) \cdot r \, dr \, d\varphi \, dz$$

$\leftarrow$ on peut changer l'ordre d'intégration

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \varphi \\ z &= z \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned}$$



Adapter les bornes au cas par cas