I Séries Fourier

Math2 D.Beck

Fonction T-périodique représentée entre $[0, T[$ par série trigonométrique. $f(t+T)=f(t)$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right]$$

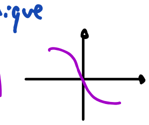
$n \in \mathbb{N} \Rightarrow 1, 2, 3 \ldots$ $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} \quad f = \frac{1}{T}}$

Harmonique : sinusoïde de fréquence $n\omega$

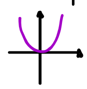
$a_1 \cdot \cos(1 \cdot \omega t) + b_1 \cdot \sin(1 \cdot \omega t)$ 1ère harmonique

▶ Parité

$f(t)$ → impaire $f(-t) = -f(t)$



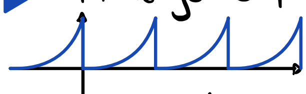
→ paire $f(-t) = f(t)$



$f(t)$ T-périodique → paire : que des $\cos \Rightarrow b_n = 0$

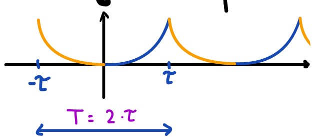
S.Fourier contient → impaire : que des $\sin \Rightarrow a_n = 0$

▶ Prolongement périodique



$f(t) = t^2,\ 0 \le t < \tau$

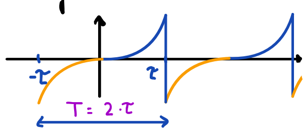
Prolongement paire :



$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)\,dt \quad n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = 0$$

Impaire :



$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)\,dt \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$a_n = 0$$

▶ Propriétés

$\lambda \cdot f(t) \xrightarrow{F} \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_0, & \lambda \cdot a_1, \ldots \\ & \lambda \cdot b_1, \ldots \end{bmatrix}$

Linéarité

$f(t), g(t) \xrightarrow{F} \begin{bmatrix} a_0, a_1 \ldots \\ b_1, b_2 \ldots \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c_0, c_1 \ldots \\ d_1, \ldots \end{bmatrix}$

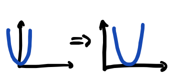
$\downarrow +$ $\quad +$

$f(t) + g(t) \xrightarrow{F} \begin{bmatrix} a_0 + c_0, & a_1 + c_1, \ldots \\ b_1 + d_1, & b_2 + d_2, \ldots \end{bmatrix}$

Time scaling $g(t) = f\left(\frac{t}{s}\right) \rightsquigarrow$ coeff. inchangés

Spectre est dilaté de $\cdot\frac{1}{a}$ $g(t)$ s.T-périodique $s > 0$

Time shifting



$f(t) \xrightarrow{F} \begin{bmatrix} c_0, & c_1, & c_2, \ldots \\ & c_{-1}, & c_{-2}, \ldots \end{bmatrix}$ $\cdot e^{-jn\omega t_0}$

$\downarrow$

$f(t-t_0) \xrightarrow{F} \begin{bmatrix} c_0, & c_1 \cdot e^{-j\omega t_0}, & c_2 \cdot e^{-2j\omega t_0} \ldots \\ & c_{-1} \cdot e^{j\omega t_0}, & c_{-2} \cdot e^{2j\omega t_0} \ldots \end{bmatrix}$

Multiplication $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,g(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \overline{d_n}$

coeff. complexe

sinon devient non périodique !

Intégration

Cos devient sin

$f(t) \xrightarrow{F} \begin{bmatrix} 0 & \ldots & a_k \ldots \\ & \ldots & b_k \ldots \end{bmatrix}$

$\downarrow \int$

$\int f(t)dt \xrightarrow{F} \begin{bmatrix} 2C & \ldots & -\frac{1}{k\omega}b_k \ldots \\ & \ldots & \frac{1}{k\omega}a_k \ldots \end{bmatrix}$

$F(t) = C + \sum_{k=1}^{\infty} \ldots \cos(kt) \ldots \Rightarrow$ "$C = \frac{a_0}{2}$"

Dérivation

$f(t) \xrightarrow{F} \begin{bmatrix} a_0 & \ldots & a_k \ldots \\ & \ldots & b_k \ldots \end{bmatrix}$

$\downarrow \frac{d}{dt}$

$f'(t)dt \xrightarrow{F} \begin{bmatrix} 0 & \ldots & k\omega b_k \ldots \\ & \ldots & -k\omega a_k \ldots \end{bmatrix}$

▶ Application au calcul différentiel

$* \quad \dot{x}(t) + x(t) = y(t)$

$\Rightarrow$ trouver $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos(\omega k t) + b_k \sin(\omega k t)\right]$

de même fréquence ω que $y(t)$

1. Réarranger * avec les SF, isoler a_0, a_k, b_k
2. Résoudre système linéaire

▶ Trouver les paramètres

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega t}\,dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \qquad 2|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \overline{c_n}$

$a_0 = 2 \cdot c_0 \qquad b_n = -2\,\mathrm{Im}(c_n)$

$a_n = 2 \cdot \mathrm{Re}(c_n) \qquad f(t)$ périodique $\Rightarrow \int_0^T = \int_d^{d+T}$

▶ Forme complexe

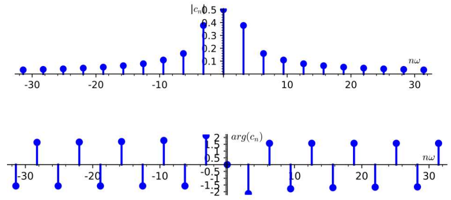
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{jn\omega t}$$

$$\cos(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2}$$

$$\sin(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j}$$

▶ Spectre

Amplitude vs freq.



▶ Egalité de Parseval

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)}$$

$\bar{P}$ du signal $= \sum \bar{P}_n$ ~ harmonique

▶ Norme quadratique (valeur RMS)

$$\|f\| := \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt} \qquad \|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Distance entre deux fcts :

$$\|f-g\| = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)-g(t)|^2\,dt}\,.$$

▶ Puissance d'une harmonique

$\bar{P}_n = 2|C_n|^2 \quad \bar{P}_0 = C_0^2$

▶ Convergence séries Fourier

Thm Dirichlet : - $f(t)$ T-périodique bornée
- nombre fini maxima/minima
- nombre fini discontinuité

=> la série de Fourier de $f(t)$ converge vers $f(t)$

qualité convergence $\propto$ nombre de dérivées de $f(t)$

Phénomène Gibbs → overshoot sur point de discontinuité

▶ DFT $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

coeff. Fourier approximés par $\sum$ Riemann

$(x_0, \dots, x_{n-1})^t \to (C_{-N}, \dots, C_N)^t$

$$C_\ell = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot e^{-j\ell k 2\pi/n} \leftrightarrow x_k = \sum_{\ell=-N}^{N} C_\ell \cdot e^{j\ell k 2\pi/n}$$

=> $n = 2N+1$ nombres complexes $\quad \ell = -N, \dots, N$

FFT matlab → fft() ↔ ifft()

selon déf. ! diviser le résultat par n pour trouver les coefficients Cn de la DFT

Table de primitives

$\sin(at)^2$	$\frac{at-\cos(at)\sin(at)}{2a}$
$\cos(at)^2$	$\frac{at+\cos(at)\sin(at)}{2a}$
$\sin(at)\sin(bt)$	$-\frac{(a-b)\sin((a+b)t)-(a+b)\sin((a-b)t)}{2(a^2-b^2)}$
$\cos(at)\cos(bt)$	$\frac{(a-b)\sin((a+b)t)+(a+b)\sin((a-b)t)}{2(a^2-b^2)}$
$\cos(at)\sin(bt)$	$-\frac{(a-b)\cos((a+b)t)-(a+b)\cos((a-b)t)}{2(a^2-b^2)}$
$\cos(bt)\,e^{(at)}$	$\frac{a\cos(bt)e^{(at)}+be^{(at)}\sin(bt)}{a^2+b^2}$
$e^{(at)}\sin(bt)$	$-\frac{b\cos(bt)e^{(at)}-ae^{(at)}\sin(bt)}{a^2+b^2}$
$t\sin(at)$	$-\frac{at\cos(at)-\sin(at)}{a^2}$
$t\cos(at)$	$\frac{at\sin(at)+\cos(at)}{a^2}$
$t^2\sin(at)$	$\frac{2at\sin(at)-\left(a^2t^2-2\right)\cos(at)}{a^3}$
$t^2\cos(at)$	$\frac{2at\cos(at)+\left(a^2t^2-2\right)\sin(at)}{a^3}$
$te^{(at)}$	$\frac{(at-1)e^{(at)}}{a^2}$
$t^2e^{(at)}$	$\frac{\left(a^2t^2-2at+2\right)e^{(at)}}{a^3}$

II Statistique descriptive

Décrit les caractéristiques d'un ensemble de données. $x_1, x_2, \dots, x_n$

▶ Paramètres de position

Médiane $(x_1 \leq x_2 \leq x_3 \dots)$

$$x_{1/2} := \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})}, & n \text{ impair} \\ \frac{1}{2}\left(x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}\right), & n \text{ pair} \end{cases}$$

Mode $\hat{x}$: échantillon x_i le plus fréquent

Quantile $0 < p < 1$ par ex $x_{0,25}$ "quartile"

$$x_p := \begin{cases} x_{(\lfloor n\cdot p+1 \rfloor)}, & n\cdot p \notin \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2}\left(x_{(n\cdot p)} + x_{(n\cdot p+1)}\right), & n\cdot p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\lfloor z \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq z\}$

▶ Paramètres de dispersion

$z_i := \frac{x_i - \bar{x}}{s'}$ Variable centrée réduite

$e := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|$ Ecart moyen

Variance, écart type ...