Coordonnées et composantes

λ_1, λ_2 composantes de $\vec{v}$ $\quad e_1 \nparallel e_2$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 \cdot e_1\\ \lambda_2 \cdot e_2\end{pmatrix}$$

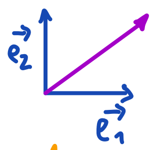
$\vec{OP} = \begin{pmatrix}x_P\\ y_P\end{pmatrix}$ Coordonnées du point P

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix}x_Q - x_P\\ y_Q - y_P\end{pmatrix} \qquad \lambda\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \lambda x_2\\ \lambda x_3\end{pmatrix}$$

Norme

$\|\vec{v}\|$ norme de $\vec{v}$ = longueur $\vec{v}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix} = a_1 \cdot \vec{e_1} + a_2 \cdot \vec{e_2}$



$\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 \ldots}}$ dim 2 et plus

Vecteur unitaire si $\|\vec{v}\| = 1$

Règles : $\vec{v}, \vec{w}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

(1) $\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$

(2) $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$

(3) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) + (\vec{v} \cdot \vec{w})$

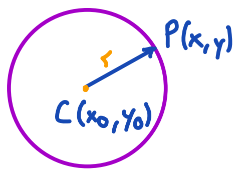
Normalisation $\vec{v} \neq \vec{0}$ (même direction que $\vec{v}$ avec longueur = 1)

$$\frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v} \Rightarrow \left\|\frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}\right\| = 1$$

Colinéaire : $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{w}$

Equation d'un cercle :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



Produit scalaire

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos(\theta) \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ∢ aigus; $= 0$ ⊥; < 0 ∢ obtus

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}\right) \in [0, \pi]$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \left(+ \underset{\text{dim. 3}}{a_3 \cdot b_3} \ldots\right)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ alors $\vec{u} \perp \vec{v}$

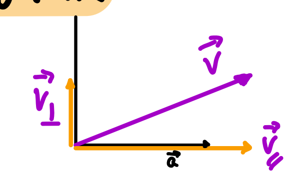
Thm: $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$

Projection orthogonale

$\vec{v}$ sur $\vec{a} \neq 0$

$$\vec{v}_{\parallel} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel}$$

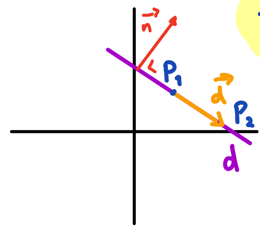


Valable en dim. 3

Droites et plans

Equation Paramétrique

$\boxed{d : \vec{OP} + t \cdot \vec{d} \quad t \in \mathbb{R}}$



tout point de d $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = x_P + t \cdot d_1 \\ y = y_P + t \cdot d_2 \end{cases}$

Equation cartésienne :

$\boxed{\begin{array}{l}\vec{n} = \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} \Rightarrow \perp \text{ à } d \\ d : ax + by = c \\ a, b, c \in \mathbb{R}\end{array}}$

De cartésienne à paramétrique: $ax + by = c$

2 points de d

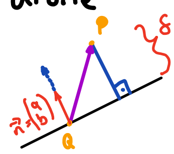
$P_1(x_1, y_1) \quad P_2(x_2, y_2)$ $\qquad \vec{P_1P_2} = \begin{pmatrix}x_2 - x_1\\ y_2 - y_1\end{pmatrix} = \vec{d}$

$ax_1 + by_1 = c \quad ax_2 + by_2 = c \Rightarrow \vec{OP_1} + t \cdot \vec{d}$

Distance point à une droite

$d: ax + by + c = 0$

$P(x_0, y_0)$

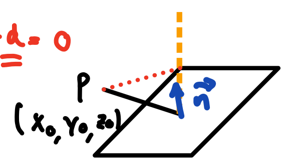


$\delta(d, P) = \|\mathrm{proj}_{\vec{n}}(\vec{QP})\|$

$$\delta(d, P) = \frac{|\vec{QP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

D. à un plan ! $ax + by + cz + d = 0$

$$\delta(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

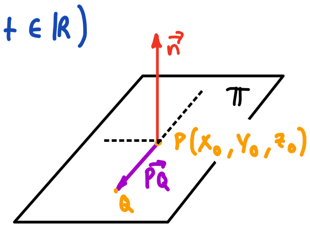


Equation d'un plan dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \boxed{\vec{OP} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

π : $Q(x, y, z)$ t.q $\vec{PQ} \perp \vec{n}$

$\boxed{ax + by + cz = d}$



$$d = \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = ax_0 + by_0 + cz_0$$

Produit vectoriel

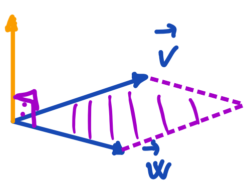
Définition : $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{matrix}$$

Chaque composante est calculée par le déterminant : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc$

Représentation :



$\Rightarrow \vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{v}$
$\Rightarrow \vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{w}$

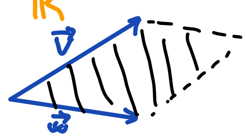
Norme : $\|\vec{v} \times \vec{w}\| \triangleq$ aire

Sens : avec les doigts pouce $= \vec{e}_1$

Règles $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$; $\lambda \in \mathbb{R}$

(1) $\vec{u} \times \vec{u} = 0$
(2) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
(3) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w}$
(4) $(\lambda \vec{v}) \times \vec{v} = \lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (\lambda \vec{v})$
(5) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$

Déteminant et aire $\mathbb{R}^2$



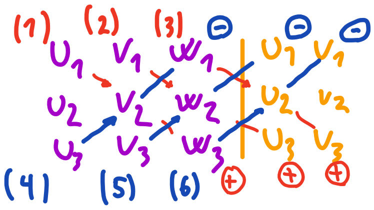
$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$$\text{aire} = \|\vec{v} \times \vec{w}\| = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$
$$= ad - bc$$

$\vec{v}$ et $\vec{w}$ col. si $\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = 0$

Produit mixte $\mathbb{R}^3$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] := \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$



$$u_1 v_2 w_3 + v_1 w_2 u_3 + w_1 u_2 v_3$$
$$= - u_3 v_2 w_1 - v_3 w_2 u_1 - w_3 u_2 v_1$$

Produit mixte $\triangleq$ volume parallélépipède

Volume tétraèdre T

$$\text{vol}(T) = \frac{1}{6} \cdot |\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}|$$ det

Indépendance linéaire

Combinaison linéaire : $\vec{S} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{u}_n$
$\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$

Vecteurs linéairement dépendants si :

$$\boxed{\det(\vec{u}_1 | \vec{u}_2 | \ldots) = 0}$$

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0}$$

coefficients $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ <u>non</u> tous nuls
au moins 1 scalaire $\neq 0$

Dans $\mathbb{R}^2$: $\Rightarrow$ vecteurs colinéaires (droite)
Dans $\mathbb{R}^3$: $\Rightarrow$ même plan

Vecteurs linéairement indépendants si :

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0}$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n = 0$$

Base

$S = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n)$ forme une <u>base</u> de $\mathbb{R}^n$ si : - $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n$: lin. indépendants
- au plus et au moins n vecteurs
ex $\mathbb{R}^3 \Rightarrow 3$ vecteurs

$\Rightarrow \mathbb{R}^n$ exprime tout l'espace

Enveloppe linéaire : $\mathcal{L} = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n\}$
$\Rightarrow \triangleq$ ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{u}_1 \ldots \vec{u}_n$