

Matrices

Système linéaire:

Matrice augmentée:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n} = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn} = b_m \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

m lignes (n équations)
n colonnes (n inconnus)

taille $m \times (n+1)$

Matrice avec $()$ ou $[]$ $\Rightarrow$ correct

Matrice $A(i,j) \triangleq a_{ij}$: ligne i ; colonne j

Opérations sur matrices

- 1) Multiplier une ligne par $\lambda \neq 0$
- 2) Echanger 2 lignes
- 3) Additionner une ligne à une autre

Élimination Gauss-Jordan

(1) $\left| \begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 1 & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right|$

Si que 0, alors considérer bloc *

(2) $\left| \begin{array}{c|c} a_{11} & * \\ \hline a_{21} & * \end{array} \right|$

a_{11} doit être $\neq 0$
sinon échanger ligne

(3) $\left| \begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline a_{21} & * \end{array} \right|$

diviser L_1 par a_{11}
 $\Rightarrow a_{11} = 1$

(4) $\left| \begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline 0 & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right|$

Remplacer chaque L_k
($k \geq 2$) par $L_k - a_{k1} \cdot L_1$

(5) Réappliquer les méthodes sur le bloc *

Forme échelonnée

échelonnée réduite

$$A = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & ? & ? & a \\ 0 & \textcircled{1} & ? & b \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & c \end{bmatrix}$$

pivots

$\Rightarrow$ tous les nombres avant le pivot sont 0

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ enlevé L_3 dans L_2 etc...

Exemple variable libre

$$\begin{cases} 2x - 2z = 2 \\ -x + y = 3 \end{cases} \rightarrow \text{ref} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ poser $z = t$ ($t \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} x - t = 1 \\ y - t = 4 \\ z = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = 4+t \\ z = t \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

équation paramétrique

Calcul matriciel

Transposée: $A = (a_{ij})_{m \times n}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$A^T = (a_{ji})_{n \times m}$
échanger ligne et colonnes

Addition (généralise addition vectorielle)

A et B de même taille ($m \times n$)
addition taille différente non définie

$$A + B = a_{ij} + b_{ij} \Rightarrow m \times n$$

Multipliation

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad A (m \times n) \\ \lambda A = (\lambda a_{ij}) = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Produit matriciel

Seulement si: $A_{m \times n}$ et $B_{n \times p}$

$$A \cdot B \Rightarrow \begin{matrix} m \times n \\ n \times p \end{matrix} \Rightarrow AB_{m \times p}$$

$$(1) \lambda (AB) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$$

$$(2) (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad C_{p \times s}$$

$$(3) A(B+C) = AB + AC \quad C_{n \times p}$$

$$(4) A \cdot 0 = 0$$

$$(5) A \cdot I_n = A$$

$$(6) (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

$$AB \neq BA$$

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

produit scalaire entre ligne et colonne

$$\begin{matrix} 3 \times 3 & 3 \times 2 & 3 \times 2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 16 & 38 \\ 20 & 49 \\ 24 & 60 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$(A \cdot B)(i, j) = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, p \end{matrix}$$

$m \times n \quad n \times p$

Rang $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Rang : nombre max de colonnes ou lignes dans A qui sont lin. indépendantes
 $0 \leq \text{rang}(A) \leq \min\{n, m\}$

$\text{rang}(A) = \text{nombre pivot de rref}$

$$\text{rang}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Noyau "zéros" de la matrice

$$\ker(A) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

$$n = \text{rang}(A) + \dim(\ker(A))$$

Si $\text{rang}(A) < n$ alors $\dim(\ker(A)) \geq 1$
 $\Rightarrow \dim(\ker(A)) \triangleq$ nombres variables libre de A.

Matrice régulière $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Matrice carrée $\rightarrow$ régulière si $\text{rang}(A) = n$
 $\Rightarrow n$ pivots

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ régulière} \Leftrightarrow A \text{ inversible}$$

$$\Rightarrow A^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Inverse / déterminant

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \neq A^{-1} \cdot B^{-1}$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Critère inversion : A régulière
ou $\det(A) \neq 0$

2x2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Par Gauss :

$$= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$[A \mid I_n] \xrightarrow{\text{rref}} [I_n \mid A^{-1}]$$

Trouver rref $([A \mid I_n])$ par Gauss de la matrice augmentée $[A \mid I_n]$

Transformation

Echanger 2 lignes :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

échanger 2 lignes de la matrice de transformation

Multiplier ligne par λ

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \lambda b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$L_i \leftrightarrow L_i + \lambda L_j$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 + \lambda b_1 \end{bmatrix}$$

Inverser colonne

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{bmatrix}$$

Rotation θ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

rot. horaire

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

rot. anti-horaire