1. Ensembles

$(a,b) \neq \{a,b\}$ ← vecteur

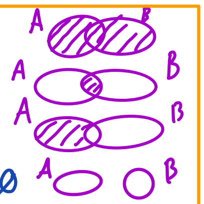
- Pas d'ordre
- Notation implicite : $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$
  explicite : $B = \{1,2,3,4\}$
- Sous ensemble : $A \subset B$ → appartient à B

$A \subset A \quad \emptyset \subset A$ $\quad \{1,2\} \subset \{1,2,3\}$

$\mathbb{N}$:= entiers naturels $\{0,1,2 \ldots\}$	
$\cup$ $\mathbb{Z}$:= entiers relatifs $\{-2,-1,0,1\}$	
$\cup$ $\mathbb{Q}$:= nombres rationnels $\{\frac{p}{q}\}$	
$\cup$ $\mathbb{Q}'$:= irrationnel $\{\pi, e, \sin(1), 2^{\sqrt{2}}\}$	
$\cup$ $\mathbb{R}$:= réels	
$\cup$ $\mathbb{C}$:= complexes	

Opérations

Union : $A \cup B$
Intersection : $A \cap B$
Différence : $A \setminus B$
Disjoint : $A \cap B = \emptyset$



Quantificateur

$\forall x$ "pour tout x"
$\exists x$ "il existe au moins un x" $\neq$ ~~$\exists x$~~

Produit cartésien

$A \times B := \{(a_1,b_1),(a_2,b_2)\}$
$A \times A := A^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$
$A^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$

Nombre d'éléments de A : $|A|$
$|A \times B| = |A| \cdot |B|$

2. Réels

Virgule flottante : $x = \pm a \cdot 10^e \quad a \in [1,10[$
Développement décimal : $0{,}3333\ldots \quad e \in \mathbb{Z}$

3. Notions algébriques

3.1 Valeur absolue

$x \in \mathbb{R} \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \qquad |x+y| \leq |x| + |y|$
$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \qquad |x-y| \geq |x| - |y|$
$|x-y| \geq |y| - |x|$

Factorielle

$n \in \mathbb{N}$
$n! = 1 \cdot 2 \ldots n$
$0! = 1$

Coeff bin

$k, n \in \mathbb{N}$
$k \leq n$

$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \in \mathbb{N}$

$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Triangle de Pascal

n \ K →	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Modulo

X mod Y = reste
Combien de Y dans X ? => reste

Nombres complexes

$\begin{cases} Re(z) = Re(w) \\ Im(z) = Im(w) \end{cases}$ si $z = w \in \mathbb{C}$

1. Forme cartésienne

$\mathbb{C} := \{a + bi \mid a,b \in \mathbb{R}\}$; tel que $i^2 = -1$
$\cup$
$\mathbb{R} := \{a + 0i \mid a \in \mathbb{R}\}$

Opérations dans $\mathbb{C}$

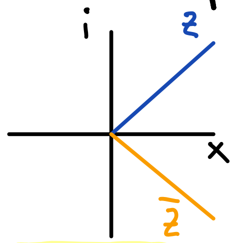
$z + w = a + bi + c + di$
$z - w = a - bi - c - di$
$z \cdot w = (a+bi) \cdot (c+di)$
$= ac + adi + bci + bd(i)^2$
$= (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i$

Division dans $\mathbb{C}$:

$z = x \cdot yi \qquad \frac{w}{z} = \frac{1}{z} \cdot w$

Pour obtenir la forme cartésienne : $\frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}}$

Plan complexe | Conjugué | module



$z = a + bi$
$= Re(z) + Im(z)$
$\bar{z} = a - bi$ => conjugué

$\bar{\bar{z}} = z$
$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
$z \cdot \bar{z} = (x+yi)(x-yi)$
$= x^2 + y^2$

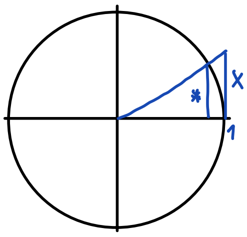
Module

$z = x + yi$
$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

2. Forme polaire

L'argument :

$$\boxed{z = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)}$$



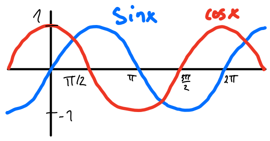
$$\varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [+\pi]$$

$+\pi$ si : $x < 0$

$\frac{\pi}{2}$ si : $z = y\cdot i$

$-\frac{\pi}{2}$ si : $z = -y\cdot i$

$\arg(-1) = \pi \neq -\pi$ $\quad \varphi \in]-\pi, \pi]$



$$\sin(\operatorname{atan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{*}{1} \qquad \cos(\operatorname{atan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\tan = \frac{\sin}{\cos}$

2.2 Forme exponentielle

$$\boxed{\begin{array}{l} e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) \\ z = |z|\cdot e^{i\varphi} \qquad \varphi = \arg(z) \end{array}}$$

Multiplier

$$z\cdot w = (r\cdot s)\left(e^{i(\varphi+\theta)}\right)$$

$\Rightarrow$ multiplier module

$\Rightarrow$ additionner argument

$$\arg(zw) = \varphi + \theta \boxed{+k\cdot 2\pi} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\in]-\pi, \pi]$$

$$|zw| = |z|\cdot|w|$$

Diviser

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s} e^{i(\varphi-\theta)}$$

$\Rightarrow$ Diviser module

soustraire argument

$$\boxed{\begin{array}{ll} z = r\cdot e^{i\varphi} & e^{i\pi} = -1 \\ \bar{z} = r\cdot e^{-i\varphi} & e^{-i\pi} = -1 \\ z^{-1} = \frac{1}{r}\cdot e^{-i\varphi} & \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n \\ = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) \end{array}}$$

$|z| = 1 \Rightarrow z^{-1} = \bar{z}$ $\quad$ Formule de Moivre

degré°	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330
x	0 2π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non déf.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non déf	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. Polynômes, zéros complexes

$$\boxed{\text{Polynôme } P(z) \text{ de degré } n \geq 1 \text{ possède } n \text{ zéros dans } \mathbb{C} \text{ (avec } \mathbb{R} \subset \mathbb{C})}$$

Racine . $z^{1/n} = \sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\varphi}{n}}$

Zéros d'un polynôme complexe

$a \in \mathbb{C}, a \neq 0$

$$z^n = a$$

$$\boxed{\begin{array}{l} w_k = e^{i\frac{2\pi}{n}\cdot k} \\ k = 0, 1, 2 \ldots n-1 \end{array}}$$

solutions : $\sqrt[n]{a}\cdot w_k$

Avec $z^3 = a$

$$z_0 = \sqrt[3]{a}$$
$$z_1 = \sqrt[3]{a}\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$$
$$z_2 = \bar{z}_0$$

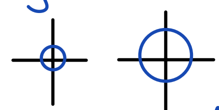
4. Fonctions complexes

Affine : $f : z \mapsto z+1$ translation horizontale

$f : z \mapsto z+i$ " verticale

$f : z \mapsto z+(1+i)$ " hor. + ver.

$a \in \mathbb{R}_{>0}$ $\quad f : z \mapsto az$ dilatation ou contraction du plan de facteur a



$f : z \longmapsto e^{i\varphi}\cdot z$ rotation d'angle φ

$c, b \in \mathbb{C}$ $\quad f : z \longmapsto cz + b$

$$= \underbrace{r}_{\text{dil.}}\cdot\underbrace{e^{i\varphi}}_{\text{rot.}}\cdot z \underbrace{+ b}_{\text{trans.}}$$

Log

$$\ln(z) := \ln(r) + i\varphi \Rightarrow e^{\ln(z)} = e^{\ln(r)}\cdot e^{i\varphi} = z$$

$$\{\ln(w) + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$$

Sin $\quad \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Cos $\quad \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Impédance

$\arg(z)$ = déphasage

$|z|$ = amplitude

$$Z = \frac{\hat{U}(t)}{\hat{I}(t)} = \frac{\hat{U}\cdot e^{j\omega t}\cdot e^{j\phi_u}}{\hat{I}\cdot e^{j\omega t}\cdot e^{j\phi_i}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}}\cdot e^{j(\phi_u - \phi_i)}$$

$$i(t) = \hat{I}\cdot\cos(\omega t + \phi_i) \qquad u(t) = \hat{U}\cdot\cos(\omega t + \phi_u)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} Z_C = \frac{-j}{\omega\cdot C} & Z_L = \omega\cdot L\cdot j \\ \phi_i = \phi_u - \frac{\pi}{2} & \phi_u = \phi_i - \frac{\pi}{2} \end{array}}$$

$$\omega = 2\cdot\pi\cdot f$$

$$\cos(\omega t) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$