

Espace vectoriel et dimension

$\mathbb{R}^n$ est espace vectoriel $\dim = n$

$$\text{si: } \begin{cases} \vec{x} + \vec{y} \in \mathbb{R}^n \\ \lambda \vec{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad \begin{matrix} \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$U \subset \mathbb{R}^n$ est sous-espace

$$\text{si: } \begin{cases} \bullet 0 \in U \\ \bullet \vec{x} + \vec{y} \in U \\ \bullet \lambda \vec{x} \in U \end{cases} \quad \begin{matrix} \vec{x}, \vec{y} \in U \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$\dim(U) = k$ si: $U = \text{span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$

$\dim(U) = \text{rank}(U)$

pour $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ lin. indép: $\text{rank}(U) = k$
 $\Rightarrow \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ base de U
 $=$ engendre tout U

Base

$S = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ forme une base de $\mathbb{R}^n$

si: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$: lin. indépendants

au plus et au moins n vecteurs
 ex $\mathbb{R}^3 \Rightarrow 3$ vecteurs

$\Rightarrow \mathbb{R}^n$ exprime tout l'espace

$\Rightarrow \text{rank}(S) = n \quad \det(S) \neq 0$

Enveloppe linéaire: $\mathcal{L} = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$
 $\Rightarrow \triangleq$ ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$

Rang $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Rang: nombre max de colonnes ou lignes dans A qui sont lin. indépendantes
 $0 \leq \text{rang}(A) \leq \min\{n, m\}$

$\text{rang}(A) =$ nombre pivot de rref

$$\text{rang}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Vecteurs linéairement dépendants si:

$$\det(\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \dots) = 0$$

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls
 au moins 1 scalaire $\neq 0$

$$\begin{matrix} n=2 \\ \vec{v}_2 = a \cdot \vec{v}_1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} n=3 \\ \vec{v}_3 = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 \\ a \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Inverse / déterminant

$$\begin{aligned} (A \cdot B)^{-1} &= B^{-1} \cdot A^{-1} \neq A^{-1} \cdot B^{-1} & \det(A^T) &= \det(A) \\ (A^{-1})^{-1} &= A & \det(A^{-1}) &= \frac{1}{\det(A)} \\ (A^T)^{-1} &= (A^{-1})^T & \det(A) \cdot \det(B) &= \det(A \cdot B) \end{aligned}$$

Critère inversion: A régulière
 ou $\det(A) \neq 0$

2x2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Par Gauss: $= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^{-1} = I_n$$

$$[A \mid I_n] \xrightarrow{\text{rref}} [I_n \mid A^{-1}]$$

Produit matriciel

$$(A \cdot B)(:, j) = \sum_{k=1}^n a_{:,k} b_{k,j} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, p \end{matrix}$$

Noyau "zéros" de la matrice

$$\ker(A) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

$$n = \text{rang}(A) + \dim(\ker(A))$$

Si $\text{rang}(A) < n$ alors $\dim(\ker(A)) \geq 1$

$\Rightarrow \dim(\ker(A)) \triangleq$ nombres variables libre de A .

Matrice régulière $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Matrice carrée $\rightarrow$ régulière si: $\text{rang}(A) = n$
 $\Rightarrow n$ pivots

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ régulière} \Leftrightarrow A \text{ inversible} \Rightarrow A^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Changement de base

Matrice de changement de base

La base $B = (b_1, b_2)$ $P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ matrice chang. base

$[b_1]_{B_{can}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $[b_2]_{B_{can}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $(n \in \mathbb{R})$

signifie $\Rightarrow \begin{cases} b_1 = x_1 e_1 + x_2 e_2 \\ b_2 = y_1 e_1 + y_2 e_2 \end{cases}$

Donc b_1, b_2 valent tant de e_1, e_2

$P^{-1} := \begin{pmatrix} \overset{e_1}{x_1'} & \overset{e_2}{y_1'} \\ x_2' & y_2' \end{pmatrix} \begin{cases} e_1 = x_1' b_1 + x_2' b_2 \\ e_2 = y_1' b_1 + y_2' b_2 \end{cases}$

Donc e_1, e_2 valent tant de b_1, b_2

$P \cdot \vec{v}_B = \vec{v}_{can}$
 $P^{-1} \cdot \vec{v}_{can} = \vec{v}_B$

vecteur $\vec{v}_B$ p.r à B_{can}
 vecteur $\vec{v}_{can}$ p.r à B

(peut aussi utiliser matrice augmentée et Gauss !)

$P^{-1} \rightarrow$ passer un vect. de B_{can} à B

Coordonnées homogènes (translation)

$T_c: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $x \mapsto T_c(x)$ $x, c \in \mathbb{R}^3$
 translation
 $T_c(x) \hat{=} Ax + c$
 $A'x = Ax + c$

Le vecteur transformé et translaté aura une composante 1 qui sera ignorée !

$A' = \left[\begin{array}{c|c} A & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]$ de translation
 $A'x = \left[\begin{array}{c|c} A & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Applications linéaires

$\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $\lambda \in \mathbb{R}$
 $x \mapsto \phi(x)$ $x, y \in \mathbb{R}^n$
 est linéaire si : $\phi(\vec{0}) = \vec{0}$
 $\phi(\lambda x) = \lambda \phi(x)$
 $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$
 bijective si : ϕ^{-1} existe

$\Rightarrow$ L'application linéaire permet de changer de dimension ex $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Représentation matricielle:

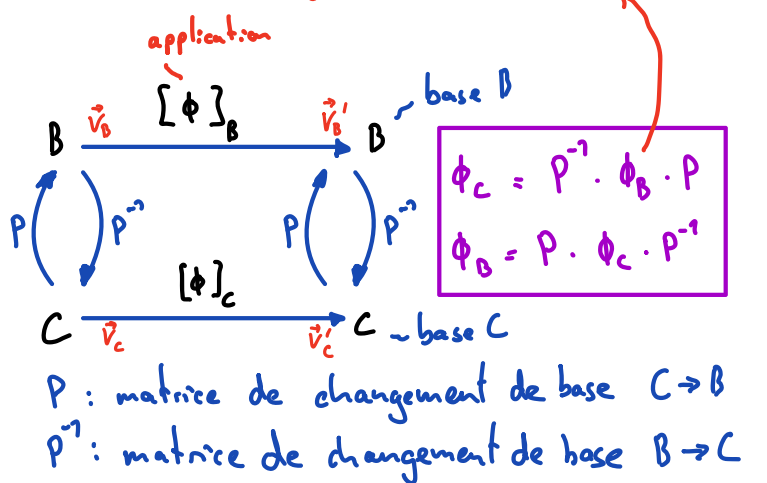
$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow \phi_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $F(\vec{x}) = F(x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n)$
 $= x_1 F(\vec{e}_1) + \dots + x_n F(\vec{e}_n)$
 $= \begin{pmatrix} | & & | \\ F(\vec{e}_1) & \dots & F(\vec{e}_n) \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
 A_F
 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$

Composition d'applications:

$V \xrightarrow[\phi]{} W \xrightarrow[\psi]{} U$ $\phi = A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
 $\psi = B \in \mathbb{R}^{s \times m}$
 $\psi \circ \phi = B \cdot A$
 ($\psi(\phi(x))$) $\leftarrow$ l'ordre des applications

Changement base application

(sous forme de matrice)



Transformations

Rotation θ
 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
 rot. anti-horaire
 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
 rot. horaire

Homothétie (agrandir)
 $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$
 Cisaillement
 $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Symétrie par rapport au plan Oxy
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Projection
 sur plan Oxy : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
 sur axe Ox : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Rotation θ horaire autour de Ox : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$
 autour de Oy : $\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$
 autour de Oz : $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$