

Algèbre linéaire II

Rang : nombre max de colonnes ou lignes dans A qui sont lin. indépendantes
 $0 \leq \text{rang}(A) \leq \min\{n, m\}$

$$\text{rang}(A) = \text{nombre pivot de ref}$$

Noyau "zéros" de la matrice

$$\ker(A) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

$$n = \text{rang}(A) + \dim(\ker(A))$$

Si $\text{rang}(A) < n$ alors $\dim(\ker(A)) \geq 1$
 $\Rightarrow \dim(\ker(A)) \triangleq$ nombres variables libre de A.

Produit matriciel

Seulement si : $A \text{ } m \times n$ et $B \text{ } n \times p$

$$A \cdot B \Rightarrow \begin{matrix} m \times n \\ n \times p \end{matrix} \Rightarrow AB \text{ } m \times p$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 38 \\ 20 & 49 \\ 24 & 60 \end{bmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Changement de base

La base $B = (b_1, b_2)$ $P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ matrice chang. base

$$[b_1]_{B_{can}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad [b_2]_{B_{can}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$P \cdot \vec{v}_B = \vec{v}_{can}$$

$$P^{-1} \cdot \vec{v}_{can} = \vec{v}_B$$

vecteur $\vec{v}_B$ p.r à B_{can}

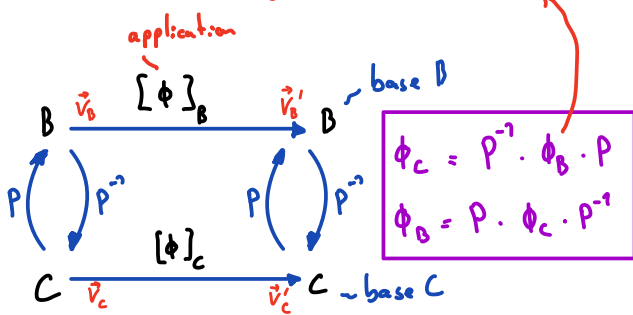
vecteur $\vec{v}_{can}$ p.r à B

(peut aussi utiliser matrice augmentée et Gauss !)

$P^{-1} \rightarrow$ passer un vect. de B_{can} à B

Changement base application

(sous forme de matrice)



$$\phi_C = P^{-1} \cdot \phi_B \cdot P$$

$$\phi_B = P \cdot \phi_C \cdot P^{-1}$$

P : matrice de changement de base $C \rightarrow B$

P^{-1} : matrice de changement de base $B \rightarrow C$

Coordonnées homogènes (translations)

$$T_c : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x \mapsto T_c(x) \quad x, c \in \mathbb{R}^3$$

translation

$$T_c(x) \hat{=} Ax + c$$

$$A'x = Ax + c$$

Le vecteur transformé et translaté aura une composante 1 qui sera ignorée !

"mise" en coordonnées homogènes

$$A' = \left[\begin{array}{c|c} A & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right] \text{ de vecteur translation}$$

$$A'x = \left[\begin{array}{c|c} A & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Applications linéaires

$$\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \mapsto \phi(x)$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$$x, y \in \mathbb{R}^n$$

est linéaire si :

$$\phi(\vec{0}) = \vec{0}$$

$$\phi(\lambda x) = \lambda \phi(x)$$

$$\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$$

bijective si : ϕ^{-1} existe

$\Rightarrow$ L'application linéaire permet de changer de dimension ex $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Représentation matricielle :

$$F(\vec{x}) = F(x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n)$$

$$= x_1 F(\vec{e}_1) + \dots + x_n F(\vec{e}_n)$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow \phi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} & f \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ F(\vec{e}_1) & \dots & F(\vec{e}_n) \\ | & & | \end{pmatrix}}_{A_F} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Composition d'applications :

$$V \xrightarrow{\phi} W \xrightarrow{\psi} U \quad \phi = A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\psi = B \in \mathbb{R}^{s \times m}$$

$$\psi \circ \phi = B \cdot A$$

($\psi(\phi(x))$) $\leftarrow$ l'ordre des applications

Transformations

Rotation θ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

rot. anti-horaire

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

rot. horaire

Symétrie par rapport au plan Oxy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Rotation θ horaire

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} O_x$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} O_y$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} O_z$$

Cisaillement

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projection

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ sur plan } Oxy$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ sur axe } O_x$$

Homothétie (a.g.r.d.r)

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

Matrice régulière : $\Rightarrow$ matrice carrée $n \times n$
 $\Rightarrow \det(A) \neq 0, \text{rang}(A) = n$

Déterminant

A matrice carrée $n \times n$

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\det(A^T) = \det(A)$$

2x2

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$n \times n$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & \dots \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ a_{21} & \dots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ a_{31} & \dots \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^2 a_{11} \cdot [M_{11}] + (-1)^3 a_{12} [M_{12}] + (-1)^4 a_{13} [M_{13}] \dots$$

On peut prendre n'importe quel vecteur $V_1, \dots$ et adapter les matrices M et les facteurs $(-1)^x$ sur le même principe.

Gauss

Faire l'algo de Gauss et corriger le det par les facteurs

- Multiplié ligne (ou col.) par λ le det est multiplié par λ
- Echanger 2 lignes (ou col.) det change de signe
- Additionner un multiple d'une ligne det ne change pas
- Le det d'une matrice triangulaire sup. ou inf est le produit des éléments de la diagonale

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

$$\det(A') = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} = \det(A) \cdot \lambda_1 \cdot (-1) \cdot \lambda_2$$

$$\Rightarrow \det(A) = \frac{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \dots}{\lambda_1 \cdot (-1) \cdot \lambda_2 \dots}$$

Trace

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} \dots$$

$$\text{tr}(A') = \text{tr}(B^{-1} \cdot A \cdot B)$$

$\hookrightarrow$ la trace ne dépend pas de la base!

$$\text{tr}(A \cdot B) = \text{tr}(B \cdot A) !$$

Matrice inverse

Critère inversion : A régulière ou $\det(A) \neq 0$

$$2 \times 2 \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$n > 2 \quad A \cdot A^{-1} = I_n$$

$$[A \mid I_n] \xrightarrow{\text{ref}} [I_n \mid A^{-1}]$$

Matrice de transition (chaîne Markov)

$$T = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,25 \\ 0,3 & 0,3 & 0,35 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$\Sigma = 1$

1 Zurich
2 Bâle
3 Genève

$$T \cdot X_0 = X_1$$

$$T \cdot Y = Y$$

$$T^2 \cdot X_0 = X_2$$

$$T^n \cdot X_0 = X_n$$

$\Rightarrow Y = \text{vecteur d'état stationnaire}$

La matrice de transition à toujours

la valeur propre $\lambda = 1$

Valeur propre

$A \in n \times n$

Valeur propre

$$A \vec{v} = \lambda \vec{v}$$

$$A \vec{v} = \lambda I_n \vec{v}$$

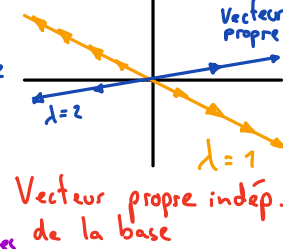
$$(A - \lambda I_n) \vec{v} = 0$$

$$(A - \lambda I_n) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

polynôme des v. propres

valeurs propres



$$\text{ex } (3 - \lambda_1)(2 - \lambda_2) = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 2$$

A possède au plus n valeur propre ! et au minimum 0

Vecteur propre

Vecteur qui reste sur sa ligne de span après une application et se multiplie par sa valeur propre.

Il peut y avoir une multitude de vecteurs propres pour une seule valeur propre

Spectre : ensemble des valeurs propres

Thm : Si A matrice triangulaire ou diag., les v. propres sont exactement de la diagonale

Diagonalisation (Espace propre)

$$[\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \dots]^{-1} \cdot A \cdot [\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \dots] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Vecteur propre de λ_1 Vect p. de λ_2

application dans base canonique

espace propre

matrice diagonale

$$A = E_p D E_p^{-1}$$

v. propre de λ_i

Thm si $A = A^T \Rightarrow A$ diagonalisable

A diagonalisable si : $\sum_{i=1}^k \dim(E_{\lambda_i}) = n$

Multiplicité géométrique de λ : $m_G = n - \text{Rank}(A - \lambda I_n)$

$m_G \leq m_A$ algébrique

$\Rightarrow$ nombre de vecteurs propres lin. indépendant

Multiplicité algébrique : nombre de fois que une v. propre apparaît

Square and multiply :

$$A^{16} = A^8 \cdot A^8 = (A^4)^2 = (A^2)^4 = A^2$$

Applications

Ellipse et hyperbole

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1$$

$\rightarrow$ ellipse ?
 $\rightarrow$ hyperbole ?

$\Rightarrow$ utiliser la notation matricielle équivalente

$$(x \ y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$$

A est symétrique et diagonalisable.

V. propres de A : $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ Ellipse
 $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ hyperbole

Suite de Fibonacci :

$$A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$