

Transformée de Laplace

DB
05.02.23

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$$

► $f(t)$ d'ordre exponentiel si

$$-M e^{\sigma t} \leq f(t) \leq M e^{\sigma t} \Rightarrow |f(t)| \leq M e^{\sigma t}$$

L'abrisse de convergence est σ_c avec
 $\sigma > \sigma_c$ l'inégalité est vérifiée
 $\sigma < \sigma_c$ inégalité non vérifiée

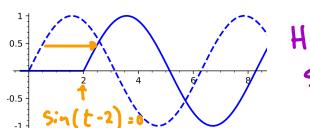
Thm: $F(s)$ converge si: $f(t)$ d'ordre exponentiel
 avec σ_c tel que $s \in \mathbb{C}$ et $\operatorname{Re}(s) > \sigma_c$

► Translation dans le temps

$$\text{Fonction de Heaviside } H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

↳ modéliser enclenchement / déclenchement

Translation à droite



$$H(t-a)f(t-a)=0 \quad \text{si: } t < a$$

$$\begin{array}{ccc} H(t)f(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & F(s) \\ t \rightarrow t-a & \downarrow & \downarrow e^{-as} \\ H(t-a)f(t-a) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & e^{-as}F(s) \end{array}$$

Translation à gauche

Translate de a vers la gauche.

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & F(s) \\ t \rightarrow t+a & \downarrow & \downarrow e^{as} \\ f(t+a) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & e^{as}(F(s) - \int_0^a f(t)e^{-st} dt) \end{array}$$

► Propriétés dérivées et intégrales

► Dans le domaine temporel $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

Première dérivée: $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$

Deuxième dérivée: $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$

n -ième dérivée:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Avec $f(0), f'(0), f^{(n-1)}(0)$ valeurs initiales connues au temps $t=0$ ou $t=0^+$ s: f t échelon

$$\text{Intégrale: } \mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tilde{t}) d\tilde{t}\right) = \frac{1}{s} F(s)$$

► Dans le domaine image

Première dérivée: $F'(s) = \{ -tf(t) \}$

Deuxième dérivée: $F''(s) = \{ t^2 f(t) \}$

n -ième dérivée: $F^{(n)}(s) = \{ (-t)^n f(t) \}$

$$\text{Intégrale: } \int_s^\infty F(\tilde{s}) d\tilde{s} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{t} f(t)\right)$$

► Fonctions définies par morceaux

→ On veut exprimer en une seule fonction

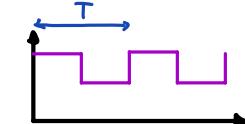
Fonction fenêtre: $H(t-a) - H(t-b)$



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t-1 & 0 \leq t \leq 3 \\ 5e^{-t/2} & 3 \leq t \end{cases} \Rightarrow [H(t) - H(t-3)](t-1) + H(t-3)5e^{-\frac{t}{2}}$$

► Fonctions périodiques

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st} dt$$



► Transformée de Laplace inverse $F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$

Cas 1: utiliser une table ou les diagrammes

Cas 2: fonction rationnelles trop compliquée
 → décomposition en éléments simples

► Décomposition en éléments simples

⇒ fonction rationnelle → somme de fractions élémentaires

① Trouver les pôles en factorisant le dénom.

② Chaque pôle crée un élément simple (fraction) de la forme $\frac{A}{(s-k)^n}$ ou $\frac{A+Bs}{(s^2+ps+q)^n}$ si

$(s^2+ps+q)^n$ n'est pas factorisable $p^2-4q < 0$

③ Mettre au même dénominateur

$$\frac{s^3 + 2s^2 - 4s + 4}{s^2(s-2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{(s-2)^2}$$

④ Egaliser numérateur et ordrer puissances de s

$$\begin{array}{cccccc} s^3 + 2s^2 - 4s + 4 & = & s^3(A+C) & + & s^2(-4A+B-2C+D) & + s(4A-4B) + 4B \\ & & = 1 & & = 2 & = 4 \\ & & & & & = 4 \end{array}$$

⑤ Trouver les coeff. et lire table pour \mathcal{L}^{-1}

► Transformée inverse avec thm. amortissement

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & F(s) \\ -e^{-at} \downarrow & & \downarrow s \rightarrow s+a \\ e^{-at}f(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & F(s+a) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} & F(s) \\ -e^{-at} \downarrow & & \downarrow s \rightarrow s-a \\ e^{-at}f(t) & \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} & F(s-a) \end{array}$$

Utilise → complémentation quadratique

$$s^2 + 6s + 13 = (s+3)^2 + 4$$

► Systèmes d'équations différentielles

$$\begin{cases} x'(t) + 2y'(t) + x(t) - y(t) = \sin t \\ 2x'(t) + 3y'(t) + x(t) - y(t) = e^t \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} sX(s) + 2sY(s) + X(s) - Y(s) = \frac{1}{1+s^2} \\ 2sX(s) + 3sY(s) + X(s) - Y(s) = \frac{1}{s-1} \end{cases}$$

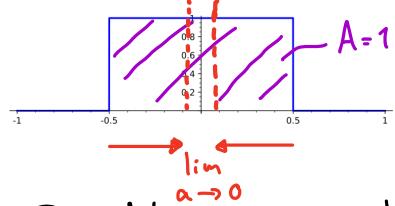
Matrice $\begin{pmatrix} s+1 & 2s-1 \\ 2s+1 & 3s-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+s^2)^{-1} \\ (s-1)^{-1} \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{b} \\ \mathbf{y} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{b} \end{matrix} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{array}{l} X(s) \\ Y(s) \end{array} \right\}} \boxed{\begin{array}{l} x(t) = \dots \\ y(t) = \dots \end{array}}$

2×2 inverse $\rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

► Distribution Dirac = "Fonction impulsion"

$$f_a(t) = \frac{1}{2a}(H(t+a) - H(t-a))$$



$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} f_a(t)$$

$$\delta(t) = 0, t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\frac{dH}{dt} = \delta(t)$$

Translate à droite : $\delta(t-b)$
s: $b < 0 \Rightarrow$ translation à gauche

Amplifier l'intensité : $A\delta(t)$

Transformation Laplace:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-b)\} = e^{-sb}, b > 0$$

$$\begin{array}{ccc} \delta(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & 1 \\ \downarrow \int_0^t \delta(\tau) d\tau & & \downarrow \frac{1}{s} \\ H(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \frac{1}{s} \end{array}$$

Par exemple fraction impropre: $\frac{s^2}{s^2+4} = 1 - \frac{4}{s^2+4}$

► Convolutions

Opération qui combine deux fonctions pour produire une troisième fonction, représentant la quantité d'overlap lorsqu'elles sont décalées l'une par rapport à l'autre.

→ Traitement image, filtrer/traiter signal

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u)f_2(t-u) du$$

Pour Laplace: $(f_1 * f_2)(t) = H(t) \int_0^t f_1(u)f_2(t-u) du$

$$\mathcal{L}(f_1(t) * f_2(t)) = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

Propriétés convolutions :

Commutativité: $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$

Associativité: $(f_1(t) * f_2(t)) * f_3(t) = f_1(t) * (f_2(t) * f_3(t))$

Distributivité: $f_1(t) * (f_2(t) + f_3(t)) = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$

Laplace 2 - fonctions transfert

Systèmes LTI → Linear Time-Invariant

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) \\ = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 u'(t) + b_0 u(t) \end{aligned}$$

$\downarrow \text{Laplace } f(t) \rightarrow F(s)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

↳ Fonction transfert $U(s) \xrightarrow{G(s)} Y(s)$

► Réponse indicelle / stationnaire

$$u(t) = H(t)$$

$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} \rightarrow G(s) = s \cdot Y(s) \rightarrow G(s) = \mathcal{L}(y'(t) + y(0))$$

► Réponse impulsuelle

$$u(t) = \delta(t), \mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$

$$Y(s) = G(s) \cdot 1$$

► Gain stationnaire

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

► Thm valeur initiale - finale

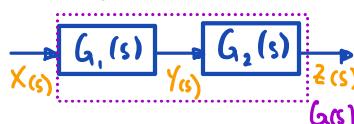
Pour $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$, si les limites existent

$$a) f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$$

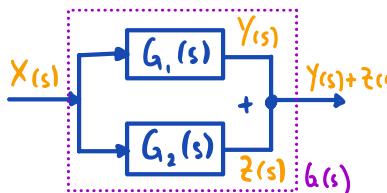
$$b) f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

► Diagrammes par blocs

► Simplifications des blocs en série

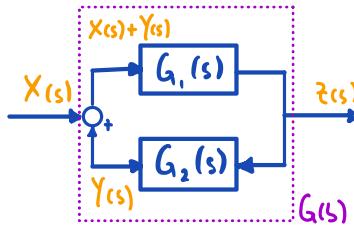


$$G(s) = \frac{Z(s)}{X(s)} = [G_1(s) \cdot G_2(s)]$$



en parallèle

$$G(s) = \frac{Y(s) + Z(s)}{X(s)} = G_1(s) + G_2(s)$$



en rétroaction

$$\begin{cases} Z(s) = G_1(s)(X(s) + Y(s)) \\ Y(s) = G_2(s)Z(s) \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{Z(s)}{X(s)} = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s) \cdot G_2(s)}$$

► Stabilité système LTI

- Asymptotiquement stable $\xrightarrow{\text{unstable}} \lim_{t \rightarrow \infty} = 0$
↳ si tous les pôles de $G(s)$ ont $\operatorname{Re}(p_i) < 0$!
- Conditionnellement stable $\xrightarrow{\text{stable}}$
- instable $\xrightarrow{\text{unstable}} \lim_{t \rightarrow \infty} = \pm \infty$

► Critères stabilité

La fonction de transfert étant souvent une fonction rationnelles, on la représente:

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = k_0 \frac{(s-z_1)(s-z_2) \dots (s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2) \dots (s-p_n)}, n \geq m$$

$$Y(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} \cdot U(s) \rightarrow \frac{(-1)(-1)(-1)}{(-1)(-1)(-1)} \cdot U(s) = U(s) \left(\frac{A}{(s-p_1)^m} \right)$$

(1) À une paire de pôles complexes $p = \lambda \pm j\omega_0$ conjugués avec partie réelle négative $\lambda < 0$ correspond dans le domaine de Laplace une fraction $\frac{B_1 s + B_2}{(s-\lambda)^2 + \omega_0^2}$ et dans le domaine temporel une oscillation amortie $A e^{\lambda t} \sin(\omega_0 t + \phi)$.

(2) À un pôle simple $p = \lambda$ sur l'axe réel négatif ($\lambda < 0$) correspond dans la décomposition en éléments simples un terme $\frac{A}{s-\lambda}$, c'est-à-dire dans le domaine temporel une composante $A e^{\lambda t}$, dont l'évolution temporelle est stable.

(3) Une paire de pôles complexes conjugués $p = \pm j\omega_0$ sur l'axe imaginaire détermine dans le domaine de Laplace la fraction $\frac{C_1 s + C_2}{s^2 + \omega_0^2}$, c'est-à-dire dans le domaine temporel une oscillation stationnaire $A \sin(\omega_0 t + \phi)$.

(4) À un pôle situé à l'origine du plan complexe ($p = 0$) correspond dans le domaine de Laplace une fraction $\frac{A}{s}$, dont résulte dans le domaine temporel la constante A .

(5) À une paire de pôles complexes conjugués $p = \lambda \pm j\omega_0$ avec partie réelle positive $\lambda > 0$ correspond dans le domaine de Laplace une fraction $\frac{B_1 s + B_2}{(s-\lambda)^2 + \omega_0^2}$ et dans le domaine temporel une oscillation amplifiée $A e^{\lambda t} \sin(\omega_0 t + \phi)$.

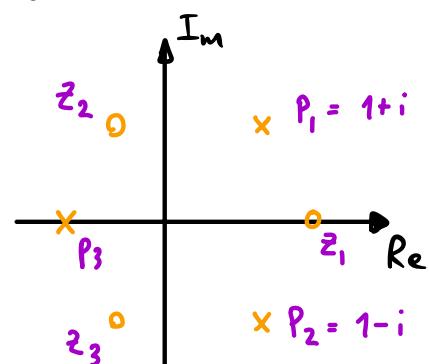
(6) À un pôle simple $p = \lambda$ sur l'axe réel positif correspond dans la décomposition en éléments simples un terme $\frac{A}{s-\lambda}$, c'est-à-dire dans le domaine temporel une composante $A e^{\lambda t}$, dont l'évolution temporelle est instable.

Résumé: Si p_i est un pôle de la fonction rationnelle image $F(s)$, il lui correspond

- $\operatorname{Re}(p_i) < 0$ une composante temporelle décroissante, (1) et (2)
- $\operatorname{Re}(p_i) = 0$ une composante temporelle constante (stationnaire), (3) et (4)
- $\operatorname{Re}(p_i) > 0$ une composante temporelle croissante dans la fonction $y(t)$. 5, 6

► Diagramme pôles - zéros

Zéros → "roue"
pôles → "croix"



Complexes => toujours conjugués

Lorsque un système possède la grandeur de puissance P_0 comme input et la grandeur de puissance P_1 comme output, on définit les décibels dB comme 10 fois le logarithme décimal du rapport P_1/P_0 . Si A_0 resp. A_1 sont les grandeurs de champ correspondantes, on a

$$\text{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_1}{P_0} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{A_1^2}{A_0^2} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{A_1}{A_0} \right)$$

► Réponse en fréquence syst. LTI

- Déterminer gain en amplitude et différence de phase de l'output.
- Le signal d'input est sinusoïdal $u(t) = \sin(\omega t) \Rightarrow e^{j\omega t}$ (plus facile en complexe)

Amplitude du signal de sortie ($t \rightarrow \infty$)

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{G_{\text{Re}}(j\omega)^2 + G_{\text{Im}}(j\omega)^2}$$

△ facteur d'amplification, gain

$$\text{Déphasage: } \phi(\omega) = \arg(G(j\omega)) = \tan^{-1} \left(\frac{G_{\text{Im}}(j\omega)}{G_{\text{Re}}(j\omega)} \right)$$

⚠ Si: $G_{\text{Re}}(j\omega) < 0$ alors ajouter $+ \pi$ à $\phi(\omega)$

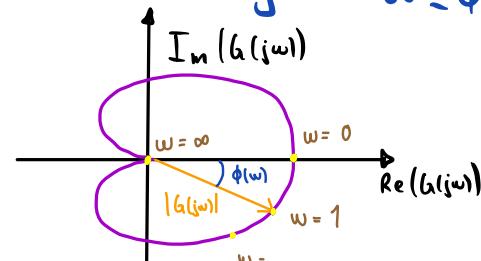
Représentation polaire de la réponse en fréquence:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\phi(j\omega)}$$

► Diagramme de Nyquist

On représente le vecteur complexe de $G(j\omega)$ en faisant varier ω de 0 à ∞

$\phi(\omega)$ donné en degré $-180^\circ \leq \phi \leq 180^\circ$



► Diagramme de Bode

→ Axe fréquence ω logarithmique 10^n

Réponse en amplitude [dB]

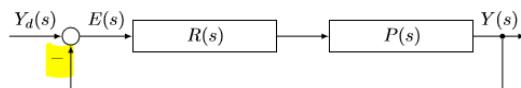
$$g(\omega) = 20 \cdot \log_{10} |G(j\omega)|$$

Réponse en phase

$$\phi(\omega) = \arg(G(j\omega)) = \arctan \left(\frac{G_{\text{Im}}(j\omega)}{G_{\text{Re}}(j\omega)} \right) [+ \pi]$$

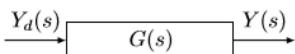
► Théorème de Nyquist

=> Etudier la stabilité d'une boucle de régulation fermée en analysant la **boucle ouverte**
=> le signal d'input est sinusoïdal !

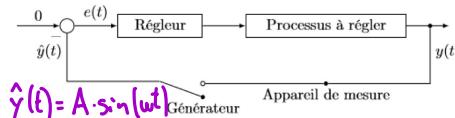


Fct transfert : $G(s) = \frac{R(s)P(s)}{1 + R(s)P(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$

$L(s)$ → fct transfert système ouvert



En pratique, on test relai avec un générateur de signal sinusoïdal et le circuit ouvert !



Erreur de réglage : $e(t) = 0 - \hat{y}(t) = A \sin(\omega t + 180^\circ)$

On veut trouver les **fréquences ω_0** pour lesquelles le **déphasage est -180°**

Signal de sortie : $y(t) = |L(j\omega_0)| \cdot A \cdot \sin(\omega_0 t)$

Trois cas de régulation selon $|L(j\omega_0)|$

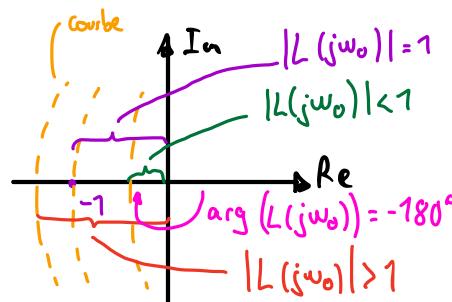
a) $|L(j\omega_0)| = 1$, amplitude de l'erreur reste constante. Système marginalement stable

b) $|L(j\omega_0)| < 1$, amplitude erreur diminue vers 0
Système asymptotiquement stable

c) $|L(j\omega_0)| > 1$, amplitude erreur augmente constamment. Système instable

Ces trois cas peuvent être facilement distingués à l'aide de la courbe de Nyquist. En effet, dans le premier cas, on a $|L(j\omega_0)| = 1$ et $\arg L(j\omega_0) = -180^\circ$. La courbe de Nyquist doit donc passer par le point $L(j\omega_0) = -1 + 0j$, autrement dit par le point $(-1, 0)$. Dans le deuxième cas ($|L(j\omega_0)| < 1$) la courbe passe à droite de ce point et dans le troisième ($|L(j\omega_0)| > 1$) à gauche. Ce raisonnement reste valide lorsque le signal d'entrée n'est pas nul et peut être généralisé sous la forme

Nyquist :



► Critères de stabilité

Déterminer stabilité système fermé avec le diagramme de Nyquist du système ouvert

- Tous les pôles de $L(s)$

se situent dans le demi-plan gauche à l'exception d'un maximum 2 pôles à l'origine

- Le point critique $(-1, 0)$ se trouve toujours à gauche de la courbe pour $\omega : +0 \rightarrow +\infty$

► Marges => utile pour la qualité de la stabilité

► Marge d'amplitude

Inverse du gain lorsque $\phi(j\omega) = -180^\circ$

=> combien peut être augmenté le gain du système ouvert avant que le système fermé devienne instable.

$$M_R = \frac{1}{|L(j\omega_0)|}$$

► Marge de phase

Quel décalage de phase supplémentaire du syst. ouvert possible avant que système fermé devienne instable.

Syst. stable: $0^\circ \leq \varphi_R \leq 180^\circ$

